Volume d'un tétraèdre

Ayoub Hajlaoui

Aux tréfonds de l'espace, prenez de la hauteur,
que vous soyez rapace ou graine d'aviateur.

Énoncé : (temps conseillé : 55 min) Polynésie, juin 2014

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$\mathrm{A}(5\ ;\ -5\ ;\ 2), \mathrm{B}(-1\ ;\ 1\ ;\ 0), \mathrm{C}(0\ ;\ 1\ ;\ 2) \quad \text{et } \mathrm{D}(6\ ;\ 6\ ;\ -1).$$

1. Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.
2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.
4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (BCD).
5. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur correspondante.
6. On admet que $\mathrm{AB} = \sqrt{76}$ et $\mathrm{AC} = \sqrt{61}$. Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$.

Correction :

1) $\mathrm{BC} = \sqrt{(0-(-1))^2 + (1-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{5}$
$\mathrm{BD} = \sqrt{(6-(-1))^2 + (6-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{7^2+5^2+(-1)^2} = \sqrt{75}$
$\mathrm{CD} = \sqrt{(6-0)^2 + (6-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{6^2+5^2+(-3)^2} = \sqrt{70}$

On voit bien que BCD n'est ni équilatéral ni même isocèle, mais il ne faut surtout pas s'arrêter là. Il ne faut pas oublier de vérifier s'il est rectangle.

$\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CD}^2 = 5 + 70 = 75$ et $\mathrm{BD}^2 = 75$, donc $\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CD}^2 = \mathrm{BD}^2$
Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, $\boxed{\text{le triangle BCD est rectangle en C.}}$

L'aire du triangle BCD s'exprime donc simplement : $\mathcal{A}_{\mathrm{BCD}} = \dfrac{\mathrm{BC}\times\mathrm{CD}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{70}}{2}$

Donc $\mathcal{A}_{\mathrm{BCD}} = \dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{5\times 14}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{14}}{2}$. Finalement, $\boxed{\mathcal{A}_{\mathrm{BCD}} = \dfrac{5\sqrt{14}}{2}}$ (en unités d'aire)

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

2)a) *Question on ne peut plus classique. Il suffit de montrer que* $\vec{n}$ *est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.*

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}7\\5\\-1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires (coordonnées non proportionnelles).

Encore heureux, sinon, le plan (BCD) ne serait même pas défini...

$\vec{n}.\overrightarrow{BC} = -2\times 1+3\times 0+1\times 2 = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{BD} = -2\times 7+3\times 5+1\times(-1) = 0$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ du plan (BCD).

Donc $\boxed{\vec{n} \text{ est un vecteur normal au plan (BCD).}}$

2)b) *Ah, l'équation cartésienne qui vient juste après la détermination d'un vecteur normal... Un peu d'originalité dans vos sujets, bon sang !*

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

Une équation cartésienne de ce plan s'exprime donc ainsi : $-2x+3y+z+d=0$, où d est une constante. Pour déterminer d, il suffit de connaître les coordonnées d'un point du plan :

B$(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)\in$ (BCD), donc $-2\times(-1)+3\times 1+0+d=0$. Donc $d=-5$.

$\boxed{\text{Une équation cartésienne de (BCD) est donc : } -2x+3y+z-5=0}$

3) $\vec{n}$ est normal au plan (BCD) et $\mathcal{D}$ est orthogonale à ce même plan. La droite $\mathcal{D}$ a donc pour vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$. De plus, elle passe par le point A$(5\ ;\ -5\ ;\ 2)$. Elle a donc pour représentation paramétrique : $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5-2t\\ y &=& -5+3t\\ z &=& 2+t\end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}}$

4) *N'oubliez pas cette évidence : un point d'intersection entre deux ensembles appartient aux deux ensembles...*

Soient $(x_H\ ;\ y_H\ ;\ z_H)$ les coordonnées du point H.

H $\in\mathcal{D}$, donc il existe $t_H\in\mathbb{R}$ tel que $\left\{\begin{array}{rcl} x_H &=& 5-2t_H\\ y_H &=& -5+3t_H\\ z_H &=& 2+t_H\end{array}\right.$ (cf représentation paramétrique de $\mathcal{D}$)

De plus, H $\in$ (BCD), donc $-2x_H+3y_H+z_H-5=0$ (cf équation de (BCD))

En remplaçant, dans cette dernière équation, x_H, y_H et z_H, par leurs expressions en fonction de t_H (cf système), on obtient l'équation suivante :

$-2(5-2t_H)+3(-5+3t_H)+2+t_H-5=0$ c-à-d $14t_H-28=0$. Donc $t_H=2$.

En reprenant le système, on obtient finalement : $\left\{\begin{array}{rcl} x_H &=& 5-2\times 2\\ y_H &=& -5+3\times 2\\ z_H &=& 2+2\end{array}\right.$

On en déduit les coordonnées suivantes : $\boxed{\text{H}(1\ ;\ 1\ ;\ 4)}$

5) *Il est temps de récolter ce que nous avons semé tout au long de l'exercice. D'après le rappel, il nous faut l'aire d'une base du tétraèdre et la hauteur correspondante. L'aire en question ne serait-elle pas celle du triangle BCD ? Et dans ce cas, quelle serait la hauteur correspondante ?*

Dans un triangle (en 2D donc), une hauteur passe par un sommet et coupe perpendiculairement le côté (droite) opposé à ce sommet. En 3D, même principe, ce qui donne : dans un tétraèdre, une hauteur passe par un sommet et coupe perpendiculairement le plan opposé à ce sommet.

Le triangle BCD est une base du tétraèdre ABCD. La hauteur correspondante est AH. En effet, la droite (AH) (c'est-à-dire la droite $\mathcal{D}$) est orthogonale au plan (BCD) et le coupe en H.

Le volume $\mathcal{V}_{\text{ABCD}}$ du tétraèdre ABCD s'exprime donc ainsi : $\mathcal{V}_{\text{ABCD}} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{BCD}} \times \text{AH}$

$\text{AH} = \sqrt{(5-1)^2 + (-5-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{16+36+4} = \sqrt{56} = \sqrt{4} \times \sqrt{14} = 2\sqrt{14}$

De plus, on sait (question 1) : $\mathcal{A}_{\text{BCD}} = \dfrac{5\sqrt{14}}{2}$

Donc $\mathcal{V}_{\text{ABCD}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5\sqrt{14}}{2} \times 2\sqrt{14} = \dfrac{5}{3} \times 14.$ Donc $\boxed{\mathcal{V}_{\text{ABCD}} = \dfrac{70}{3}}$ (en unités de volume)

Si l'énoncé dit que les longueurs sont en cm, il faut donner les volumes en cm^3. Ici, l'énoncé n'a pas donné d'unité.

6) *Encore une question classique. Quand on nous parle d'angles dans un exercice de géométrie dans l'espace, il est souvent de bon ton de penser au produit scalaire.*

Par définition, $|\overrightarrow{\text{AB}}.\overrightarrow{\text{AC}}| = \text{AB} \times \text{AC} \times \cos \widehat{\text{BAC}}$

Pourquoi ai-je mis une valeur absolue au produit scalaire ? Parce qu'à la base, la définition du produit scalaire fait intervenir l'angle orienté $\left(\text{ici } (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})\right)$, qui peut avoir un cosinus négatif. Mais ici, on nous parle de l'angle $\widehat{BAC}$, non orienté, en degrés. On veut que son cosinus soit positif. D'où l'intérêt de rajouter une valeur absolue au produit scalaire, pour enlever le signe $-$ s'il y en a (un produit scalaire pouvant bien sûr être négatif).

$\text{AB} = \sqrt{(-1-5)^2 + (1-(-5))^2 + (0-2)^2} = \sqrt{36+36+4} = \sqrt{76}$
$\text{AC} = \sqrt{(0-5)^2 + (1-(-5))^2 + (2-2)^2} = \sqrt{25+36+0} = \sqrt{61}$
Donc $|\overrightarrow{\text{AB}}.\overrightarrow{\text{AC}}| = \sqrt{76}\sqrt{61} \times \cos \widehat{\text{BAC}}$

Par ailleurs, en utilisant les coordonnées de $\overrightarrow{\text{AB}} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}} \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a :

$|\overrightarrow{\text{AB}}.\overrightarrow{\text{AC}}| = |-6 \times (-5) + 6 \times 6 - 2 \times 0| = |30+36| = |66| = 66$

En utilisant les deux expressions obtenues de $|\overrightarrow{\text{AB}}.\overrightarrow{\text{AC}}|$, on a finalement :
$\sqrt{76}\sqrt{61} \times \cos \widehat{\text{BAC}} = 66$
Donc $\cos \widehat{\text{BAC}} = \dfrac{66}{\sqrt{76}\sqrt{61}}$

Donc $\boxed{\widehat{\text{BAC}} \simeq 14,2°}$

On a utilisé la touche cos^{-1} (ou arccos) de la calculatrice, en s'assurant bien au préalable que les angles sont en degrés.