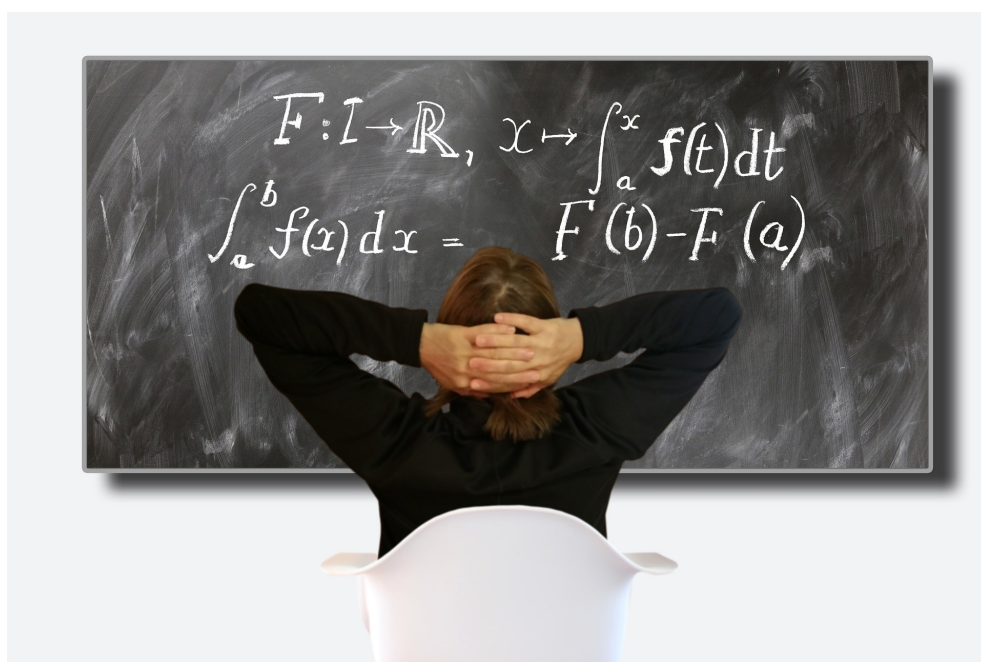

Vers la prépa ECG

Mathématiques approfondies

DR AYOUB HAJLAOUI



Avant-propos

L'idée qui a mené à la rédaction de ce document peut s'exprimer ainsi : fournir à l'élève fraîchement sorti de Terminale des outils mathématiques qui l'aideront à aborder la prépa en toute sérénité. Lui mettre le pied à l'étrier, en lui rappelant certaines de ses errances de l'année passée, tout en le préparant à l'année à venir. En ce sens, ce document ne prétend pas constituer une liste exhaustive de ce que vous verrez en mathématiques en ECG (maths approfondies).

Bien qu'initialement pensé pour les futurs élèves de prépa ECG (mathématiques approfondies), en particulier dans le choix des annales dont sont tirés les problèmes, ce document pourra convenir à tous les élèves entrant dans les autres filières de classe préparatoire aux grandes écoles, ainsi qu'en licence scientifique, pourvu qu'ils aient choisi les mathématiques en spécialité de Terminale.

Il ne s'agira pas d'un cours avant le cours, mais plutôt d'une série d'activités pour introduire en douceur, à partir du programme de Terminale, certaines notions que vous rencontrerez à partir de septembre. Le programme de Terminale (option mathématiques, pas forcément maths expertes) est donc le seul pré-requis pour attaquer ce document, même si un Terminale moyen pourra trouver certains passages relativement difficiles. S'il faut aborder des notions plus poussées, l'énoncé vous prendra par la main, en introduisant les définitions, notations ou conventions nécessaires et pas abordées en Terminale.

Les activités en question se présentent sous forme de problèmes à difficulté variable. Cette dernière, subjective, est précisée à titre indicatif :

(*) facile (**) moyen (***) difficile (****) particulièrement difficile

Ces problèmes sont tous tirés d'annales de concours, souvent d'ECS, parfois d'ECE, réadaptées au besoin pour être faisables au sortir de la Terminale. À cet effet, les thèmes les plus récurrents dans ces problèmes sont l'étude de fonctions, les suites, et l'intégration, avec un certain nombre de questions qui sont l'occasion d'aborder des notions de raisonnement et d'ensembles.

Pour chaque problème, un temps de travail préconisé est aussi indiqué : il ne correspond pas forcément au temps au bout duquel l'exercice doit être résolu, mais plutôt au

temps de recherche au bout duquel il devient raisonnable de commencer à regarder la correction.

Chaque énoncé est suivi de « remarques sur l'énoncé ». Il ne s'agit pas vraiment d'indications sur la résolution, mais plutôt de précisions sur les notations introduites par l'énoncé, ou de rappels de concepts mathématiques utiles.

Enfin, voici l'atout majeur de ce document : sa correction se veut (très) détaillée, à la manière de celle des exercices corrigés en libre accès sur mon site, site avec lequel vous êtes peut-être déjà familier : www.ayoub-et-les-maths.com. En parallèle de la correction à proprement parler, vous trouverez, en italique, des remarques, des écueils à éviter, des analogies utiles... Autant de didascalies rythmant la pièce de théâtre mathématique à laquelle vous êtes convié. Lever de rideau.

L'auteur en quelques mots

Lauréat de l'agrégation externe de mathématiques en 2020 (64^{ème} sur 323 admis et 3069 inscrits), docteur en mathématiques appliquées (université Paris VI), diplômé de l'école d'ingénieurs des Mines de Nancy et du master recherche MVA (Maths Vision Apprentissage) de l'ENS Cachan, je donne des cours de mathématiques (particuliers et en groupe, niveau lycée à prépa/L3) depuis 2008.

Parallèlement, je rédige des exercices de mathématiques (principalement niveau prépa et Terminale) ainsi que des corrigés particulièrement détaillés, que vous pouvez consulter sur www.ayoub-et-les-maths.com. J'y explique à l'élève non seulement le cheminement, mais aussi et surtout pourquoi il doit avoir telle idée à tel moment, et pourquoi telle autre idée n'est pas appropriée ; cela, dans l'optique de l'entraîner au raisonnement réel, et non à la mimique maladroite qui est l'apanage du plus grand nombre.

Table des matières

Introduction			page 1
Exercice 1	<i>Etude de fonction, limites</i>	(**)	page 2
Exercice 2	<i>Etude de fonctions</i>	(**)	page 6
Exercice 3	<i>Etude de fonctions, limites, intégrales</i>	(***)	page 9
Exercice 4	<i>Raisonnement et ensembles</i>	(****)	page 13
Exercice 5	<i>Etude de suites, limites de suites</i>	(***)	page 16
Exercice 6	<i>Polynômes, récurrence</i>	(***)	page 20
Exercice 7	<i>Etude de suites, limites de suites</i>	(***)	page 23
Exercice 8	<i>Etude de fonction, raisonnement</i>	(*)	page 28
Exercice 9	<i>Etude de fonction, limites, intégrales</i>	(****)	page 31
Exercice 10	<i>Etude de fonctions, limites, polynômes</i>	(**)	page 35
Exercice 11	<i>Intégrales, suites</i>	(****)	page 39
Exercice 12	<i>Polynômes, raisonnement, ensembles</i>	(**)	page 43
Exercice 13	<i>Intégrales, suites, limites de suites</i>	(***)	page 47
Exercice 14	<i>Probabilités, fonctions, raisonnement</i>	(**)	page 51
Quelques rappels de calcul matriciel			page 54
Exercice 15	<i>Matrices</i>	(***)	page 59

Introduction

Votre apprentissage des mathématiques dans le supérieur consistera en grande partie en la manipulation d'**assertions**. Ce sont des phrases syntaxiquement correctes (autrement dit, qui ont du sens) et qui sont soit vraies, soit fausses.

Comment ça, « soit vraies, soit fausses » ? N'est-ce pas trop général comme définition ? Toute phrase ne deviendrait-elle pas une assertion ?

Certainement pas, voyez plutôt :

- $A : « 3^2 + 12 \times 7 »$ n'est pas une assertion, car dire qu'elle serait vraie ou fausse n'aurait aucun sens.
- $B : « \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2 »$ n'est pas une assertion, car elle n'est pas syntaxiquement correcte.
- $C : « \forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 > 0 »$ est une assertion. C'est même une assertion vraie.
- $D : « \exists x \in \mathbb{R}, e^x \leq 0 »$ est une assertion. C'est une assertion fausse.
- $D : « x + 7 \geq 2 »$ est une assertion. C'est une assertion dont la véracité dépend du choix du paramètre x . Pour l'anecdote, D est appelée un prédicat.

Profitions-en pour rappeler la signification des symboles $\forall$ et $\exists$:

- $\forall$ signifie : « pour tout », ou encore « quel que soit ». L'assertion C se lit donc : « pour tout réel x non nul, $x^2 > 0$ ». Ou encore, de manière équivalente : « quel que soit le réel x non nul, $x^2 > 0$ »
- $\exists$ signifie « il existe ». L'assertion D se lit donc : « il existe un réel x tel que $e^x \leq 0$ ». Voyez comment j'ai intercalé un « tel que » à la place de la virgule, pour que la phrase ait du sens en français.

Exercice 1

*De classiques questions pour vous mettre en confiance
et que nous avançons dénués d'impatience.*

Énoncé : (temps conseillé : 35 min) (**)

d'après EDHEC 2016 ECS

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer ses limites aux bornes de son intervalle de définition.

2) Etudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = e^{-x} - x^2$

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x , possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

On notera α cette solution.

4) Montrer que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$

Remarques sur l'énoncé :

Rappelons au cas où que $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des réels positifs. C'est donc $[0; +\infty[$
Quant à $\mathbb{R}_+^*$, c'est l'ensemble des réels positifs non nul. C'est donc l'ensemble des réels strictement positifs, c'est-à-dire $]0; +\infty[$.

Correction de l'exercice 1 :

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par composée et quotient de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{-e^{-x} \times x - e^{-x} \times 1}{x^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2} \quad (\text{factorisation pour mieux voir le signe})$$

N'oubliez pas dans quel ensemble se situe x ...

Pour tout $x > 0$, $x+1 > 0$, $x^2 > 0$, et $e^{-x} > 0$

(la dernière inégalité étant même vraie pour tout réel x)

Donc, pour tout $x > 0$, $f'(x) < 0$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Reste à calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$ donc, par continuité de la fonction $\exp$ sur $\mathbb{R}$ (et en particulier en 0) :

$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = e^0 = 1$. Et : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ « $\frac{1}{0^+}$ », si vous voulez...

Par produit de limites : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$ donc, par composition de limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$.

Et : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = 0$. Enfin, par produit de limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Toujours essayer un calcul de limite direct, avant de se mettre à tenter de lever des indéterminations qui, parfois, n'existent que dans notre tête. (Bien évidemment, la plupart des questions portant sur des limites met en jeu des formes indéterminées, mais il serait dommage de se mettre inutilement dans l'impasse lorsque ce n'est pas le cas)

2) Bien entendu, on peut dériver g , étudier le signe de g' ..., mais ici, on n'est même pas obligé de passer par une dérivation. Voyez plutôt :

La fonction $x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc, par composition avec la fonction exponentielle strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier sur $\mathbb{R}_+$.

D'autre part, la fonction carré étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto -x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. (on a multiplié la fonction carré par $-1 < 0$)

Par somme des fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto -x^2$ strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+$, la fonction

g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Une somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante ne nous aurait pas permis de conclure. Un produit de deux fonctions ne nous aurait pas permis de conclure. Même un produit de deux fonctions croissantes : tenez, faites le produit avec elle-même de la fonction $x \mapsto x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et vous obtenez la fonction carré, certainement pas croissante sur $\mathbb{R}$!)

3) Ça sent le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (ou théorème de la bijection) à plein nez. Sauf qu'il faudrait « = constante » plutôt que « = x » pour pouvoir l'appliquer...

Dès lors, que faire de ce x ? Le passer de l'autre côté par soustraction ? Un coup d'oeil à la fonction g me permet de me rendre compte que ce ne serait pas le déplacement le plus intéressant ici...

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* : f(x) = x \iff \frac{e^{-x}}{x} = x \iff e^{-x} = x^2 \iff e^{-x} - x^2 = 0 \iff g(x) = 0$$

Et bien voilà une formulation plus intéressante pour utiliser le corollaire du TVI ! Avant d'aller plus loin, petite remarque sur la rédaction.

Lorsque j'écris : « Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* : f(x) = x \iff \frac{e^{-x}}{x} = x$ », je ne dis certainement pas :
« pour tout $x > 0$, on a $f(x) = x$, c'est-à-dire que l'on a $\frac{e^{-x}}{x} = x$ »

Non, je dis que, pour tout $x > 0$, l'égalité $f(x) = x$ est vraie si et seulement si l'égalité $\frac{e^{-x}}{x} = x$ est vraie. Autrement dit, pour tout $x > 0$, ces deux égalités (et en fait toutes les égalités qui ont suivi, reliées par le signe $\iff$), sont équivalentes.

D'où l'importance d'utiliser les symboles $\iff$ et $\implies$ à bon escient, uniquement dans les situations qui s'y prêtent. Plus de détails dans [cet article](#).

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$ (par composée et somme de fonctions continues).

De plus, d'après 2), g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

On n'oublie surtout pas de calculer les valeurs (ou limites) aux bornes.

$$g(0) = e^{-0} - 0^2 = 1 \text{ et, par calcul direct de limite : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

Vous serez parfois amené à écrire : $g(]0; +\infty[) =]-\infty; 1[$

Enfin : $0 \in]-\infty; 1[$.

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires nous permet donc de conclure que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Cette équation étant équivalente, sur $\mathbb{R}_+^*$, à l'équation $f(x) = x$, nous pouvons finalement affirmer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) Il s'agit tout simplement de comparer $g\left(\frac{1}{e}\right)$, $g(\alpha)$ (c'est-à-dire 0) et $g(1)$

Plus précisément, il s'agirait de montrer que $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0 > g(1)$, puis de conclure grâce à la stricte décroissance de g .

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = \exp\left(-\frac{1}{e}\right) - \left(\frac{1}{e}\right)^2 \quad \text{La notation } \exp\left(-\frac{1}{e}\right) \text{ est plus commode que } e^{-\frac{1}{e}} \dots$$

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{e}\right)} - \frac{1}{e^2} = \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{e}\right)} - \frac{1}{\exp(2)}. \quad \text{Comparons donc } \frac{1}{e} \text{ et } 2 \dots$$

On sait : $\frac{1}{e} < 2$ (car $\frac{1}{e} < 1 < 2$)

Donc, par stricte croissance de la fonction $\exp$ sur $\mathbb{R}$: $\exp\left(\frac{1}{e}\right) < \exp(2)$.

Les deux membres de l'inégalité précédente sont strictement positifs, et nous permettent donc ce qui va suivre.

Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$: $\frac{1}{\exp\left(\frac{1}{e}\right)} > \frac{1}{\exp(2)}$

Autrement dit : $\frac{1}{\exp\left(\frac{1}{e}\right)} - \frac{1}{\exp(2)}$, c'est-à-dire : $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0$.

D'autre part, $g(1) = e^{-1} - 1^2 = e^{-1} - 1 = e^{-1} - e^0$

Or : $-1 < 0$. Donc, par stricte croissance de la fonction $\exp$ sur $\mathbb{R}$: $e^{-1} < e^0$. D'où : $g(1) < 0$.

Nous avons donc montré : $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0 > g(1)$

C'est-à-dire : $g\left(\frac{1}{e}\right) > g(\alpha) > g(1)$

La stricte décroissance de g sur $\mathbb{R}_+$ nous permet enfin de conclure : $\frac{1}{e} < \alpha < 1$

Exercice 2

*Face aux nombreuses lettres, la main novice tremble
mais restez-en le maître. Vérifiez vos ensembles.*

Énoncé : (temps conseillé : 20 min) (**)

d'après HEC 2017 ECE

Soient a et b deux réels strictement positifs. Soit $G_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$G_{a,b}(x) = \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right)$$

1) Soit $y \geq 0$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $ax + \frac{b}{2}x^2 = y$

2) Soit $u \in]0;1]$. Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation $G_{a,b}(x) = u$.

Remarques sur l'énoncé :

Toutes ces lettres ne doivent pas vous inquiéter. Quand on vous demande de résoudre une équation, demandez-vous calmement qui en est l'inconnue.

Correction de l'exercice 2 :

1) Mettons-nous d'accord tout de suite : cette équation est bien évidemment d'inconnue x . Quant à y , c'est un réel positif posé au départ.

Pour tout réel x : $ax + \frac{b}{2}x^2 = y \iff \frac{b}{2}x^2 + ax - y = 0$

L'équation de départ est équivalente à cette reformulation, plus intéressante... En effet, on reconnaît maintenant une équation du second degré, mais il va falloir le justifier, même rapidement.

$b > 0$ donc $\frac{b}{2} \neq 0$. L'équation $\frac{b}{2}x^2 + ax - y = 0$ d'inconnue x est donc une équation du second degré.

Si on avait $\frac{b}{2} = 0$, l'équation serait devenue $ax - y = 0$: rien à voir avec du second degré...

Son discriminant est : $\Delta = a^2 - 4 \times \frac{b}{2} \times (-y) = a^2 + 2by$, avec $a^2 > 0$ (car $a \neq 0$), $b > 0$ et $y \geq 0$. On a donc $\Delta > 0$

L'équation $\frac{b}{2}x^2 + ax - y = 0$ admet donc deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2 \times \frac{b}{2}} = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 2by}}{b} \text{ et } x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2by}}{b}.$$

Ne vous emmêlez pas les pinceaux sur les lettres : nous avons tous appris $\Delta = b^2 - 4ac$, $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, mais le tout est de savoir qui est qui ici.

Ne soyez pas prisonnier des lettres ; attachez-vous plutôt à ce qu'elles désignent.

Finalement, quel que soit $y > 0$, l'équation $ax + \frac{b}{2}x^2 = y$ d'inconnue x admet exactement deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 2by}}{b}$ et $x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2by}}{b}$

2) Attention aux ensembles spécifiés... Il y a peu de risque que vous oubliiez l'intervalle dans lequel se situe u . Par contre, n'oubliez pas que vous résolvez l'équation sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire sur $[0; +\infty[$.

Pour tout réel positif x :

$$G_{a,b}(x) = u \iff \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) = u \iff -ax - \frac{b}{2}x^2 = \ln(u)$$

La dernière équivalence est valable car $u > 0$

$-ax - \frac{b}{2}x^2 \dots$ Voilà qui devrait vous rappeler quelque chose ! Peut-être à un signe près...

$$\text{D'où : } G_{a,b}(x) = u \iff ax + \frac{b}{2}x^2 = -\ln(u)$$

Là, pas question de remettre les mains dans le cambouis du calcul, si je l'ai déjà fait... J'ai envie d'utiliser le résultat de la question 1), valable pour n'importe quel $y \geq 0$. Oui mais là, c'est $-\ln(u)$ qui jouerait le rôle de y . D'où la nécessité de justifier qu'il est positif.

$u \in]0; 1]$. Donc (comme $\ln(1) = 0$, et par croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$) $\ln(u) \leq 0$.

Donc $-\ln(u) \geq 0$.

En prenant $y = -\ln(u)$, le résultat de 1) nous permet d'affirmer que l'équation

$ax + \frac{b}{2}x^2 = -\ln(u)$ admet exactement deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 2b \ln(u)}}{b} \text{ et } x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b \ln(u)}}{b}$$

Et là, attention à ne pas oublier que l'on cherche les solutions positives...

$a > 0, b > 0$ et $\sqrt{a^2 - 2b \ln(u)} \geq 0$ donc $x_1 < 0$.

Pour x_2 , il faut s'intéresser au signe de $-a + \sqrt{a^2 - 2b \ln(u)}$

$b \ln(u) \leq 0$ donc $-2b \ln(u) \geq 0$, et donc $a^2 - 2b \ln(u) \geq a^2$.

Par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$, on obtient : $\sqrt{a^2 - 2b \ln(u)} \geq \sqrt{a^2} = a$ (car $a > 0$)

On a donc : $\sqrt{a^2 - 2b \ln(u)} - a \geq 0$, c'est-à-dire : $-a + \sqrt{a^2 - 2b \ln(u)} \geq 0$, et enfin : $x_2 \geq 0$

Finalement, quel que soit $u \in]0; 1]$, l'équation $G_{a,b}(x) = u$ d'inconnue x admet exactement une solution sur $\mathbb{R}_+$: $x = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b \ln(u)}}{b}$

Autrement dit, l'application $G_{a,b} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow]0; 1]$ est bijective

$$x \longmapsto \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right)$$

Et sa bijection réciproque est $G_{a,b}^{-1} :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$u \longmapsto \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b \ln(u)}}{b}$$