Équitation différentielle

Ayoub Hajlaoui

Colère qu'il retient. C'est la lente épopée
du cheval qu'on retient quand il veut galoper.

Énoncé : (temps conseillé : 30 min)

Un cavalier s'élance sur l'axe des abscisses à l'instant $t = 0$. A chaque instant t (en secondes), on note $y(t)$ sa position (en mètres) sur l'axe des abscisses.
Sur $]0\ ;\ +\infty[$, t^2y'' est égale à la valeur absolue de la différence entre la vitesse instantanée y' du cavalier et sa vitesse moyenne depuis son départ (condition 1).
On suppose de plus $y(0) = 0$, et que y est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$.

1) Démontrer que la fonction y_1 définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $y_1(t) = t$ vérifie toutes les conditions ci-dessus.

2) Démontrer que si une fonction y continue sur $[0\ ;\ +\infty[$ et nulle en 0 vérifie la condition 1, alors elle est solution sur $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $t^2y'' = y' - \frac{1}{t}y$

3) Sachant qu'au bout d'une seconde, le cavalier est à une abscisse de 5 mètres, et qu'au bout de deux secondes, il est à une abscisse de 15 mètres, déterminer sa position au bout de trois secondes.
On pourra utiliser la méthode de Lagrange, c'est-à-dire chercher une solution y_2 de (E) de la forme $y_2(t) = z(t)y_1(t)$ avec z non constante

Correction :

1) La première condition de l'énoncé se traduit ainsi : pour tout $t > 0$, $t^2y''(t) = \left|y'(t) - \frac{y(t)}{t}\right|$
Or, pour tout $t > 0$, $t^2y_1''(t) = 0$ et $\left|y_1'(t) - \frac{y_1(t)}{t}\right| = |1 - 1| = 0$ et $y_1(0) = 0$. Enfin, y est continue en 0. $\boxed{y_1 \text{ vérifie bien toutes les conditions ci-dessus.}}$

2) Si y, continue sur $[0\ ;\ +\infty[$ et nulle en 0, vérifie : $\forall t > 0,\ t^2y''(t) = \left|y'(t) - \frac{y(t)}{t}\right|$, on a, en particulier : $\forall t > 0,\ y''(t) \geq 0$. y' est donc croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Il est évident que si la vitesse instantanée est croissante, la vitesse instantanée est, à chaque instant, supérieure à la vitesse moyenne entre l'instant initial et l'instant présent... Prouvons-le proprement, par exemple à l'aide de l'inégalité des accroissement finis.

Pour tout $t > 0$, y est continue sur $[0\ ;\ t] \subset [0\ ;\ +\infty[$. De plus, y est dérivable (car deux fois dérivable) sur $]0\ ;\ t[$. Et, par croissance de y' sur $]0\ ;\ t[\subset]0\ ;\ +\infty[$: $\forall x \in]0\ ;\ t[,\ y'(x) \leq y'(t)$
$y'(t)$ correspond à la constante de majoration dans l'inégalité des accroissements finis...

D'après l'inégalité des accroissements finis : $y(t) - y(0) \leq y'(t) \times (t - 0)$
On a donc montré : $\forall t > 0,\ \frac{y(t)}{t} \leq y'(t)$. D'où : $y'(t) - \frac{y(t)}{t} \geq 0$ pour tout $t > 0$.
Donc, pour tout $t > 0$, $\left|y'(t) - \frac{y(t)}{t}\right| = y'(t) - \frac{y(t)}{t}$.
Et comme on sait déjà : $\forall t > 0,\ t^2y''(t) = \left|y'(t) - \frac{y(t)}{t}\right|$, on en déduit : $\forall t > 0,\ t^2y''(t) = y'(t) - \frac{y(t)}{t}$

On a bien montré que si y est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$, nulle en 0, et vérifie la condition 1, alors elle est solution sur $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $t^2y'' = y' - \frac{1}{t}y$

3) *Résolvons tout simplement cette équation différentielle sur* $]0\ ;\ +\infty[$...

Sur $]0\ ;\ +\infty[$, l'équation différentielle $t^2y'' = y' - \frac{1}{t}y$ (équivalente à l'équation $y'' = \frac{1}{t^2}y' - \frac{1}{t^3}y$) est une équation différentielle linéaire (scalaire) d'ordre deux, homogène.

La fonction y_1 définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $y_1(t) = t$ est solution de cette équation.

Il suffit de déterminer une autre solution y_2, linéairement indépendante de y_1, pour avoir un système fondamental de solutions (y_1, y_2), qui engendrera toutes les solutions de cette équation.

Sans mauvais jeu de mot - en fait si mais tant pis, on n'est plus à un mauvais jeu de mot près (cf le titre) - faisons passer le cheval par la grange...

Déterminons une autre solution y_2, linéairement indépendante de y_1, de la forme $y_2(t) = z(t)y_1(t) = tz(t)$, où z est une fonction définie, deux fois dérivable, sur $]0\ ;\ +\infty[$, non constante.

On aurait alors $y_2'(t) = tz'(t) + z(t)$, et $y_2''(t) = tz''(t) + 2z'(t)$

Et, pour que y_2 soit effectivement solution de l'équation différentielle (E), il faut donc :

$\forall t > 0,\ t^2\big(tz''(t) + 2z'(t)\big) = tz'(t) + z(t) - \frac{tz(t)}{t}$

Autrement dit : $\forall t > 0,\ t^3z''(t) = (t - 2t^2)z'(t)$. Ou encore : $\forall t > 0,\ z''(t) = \left(\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t}\right)z'(t)$

z' doit donc être solution, sur $]0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E') : $y'(t) = a(t)y(t)$, où $a(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t}$, et une primitive sur $]0\ ;\ +\infty[$ de a est A définie par $A(t) = -\frac{1}{t} - 2\ln(t)$. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t > 0$:

$z'(t) = Ce^{A(t)} = C\exp\left(-\frac{1}{t} - 2\ln(t)\right) = Ce^{-\frac{1}{t}}\exp\left(-\ln(t^2)\right) = \frac{C}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}$

Il existe donc $D \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t > 0$, $z(t) = -Ce^{-\frac{1}{t}} + D$

On vérifie en particulier qu'en posant $z(t) = e^{-\frac{1}{t}}$, la fonction y_2 définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $y_2(t) = tz(t) = te^{-\frac{1}{t}}$ est bien solution de (E).

y_1 et y_2 étant linéairement indépendantes, (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux (E).

On en déduit que les solutions sur $]0\ ;\ +\infty[$ de (E) sont les fonctions y de la forme :

$y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) = C_1t + C_2e^{-\frac{1}{t}}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

La fonction y donnant la position du cavalier doit donc non seulement être de cette forme, mais également continue en 0, avec $y(0) = 0$, et telle que $y(1) = 5$ et $y(2) = 15$

$\lim\limits_{t\to 0} C_1t = 0$ et, par composition de limites : $\lim\limits_{t\to 0^+} C_2e^{-\frac{1}{t}} = 0$.

Pour tout choix de C_1 et C_2, y est bien continue en 0.

Les conditions imposées par l'énoncé donnent : $C_1 + C_2e^{-1} = 5$ et $2C_1 + C_2e^{-\frac{1}{2}} = 15$

La première équation donne : $C_1 = 5 - C_2e^{-1}$

En injectant cette expression de C_1 dans la seconde équation, on obtient :

$10 - 2C_2e^{-1} + C_2e^{-\frac{1}{2}} = 15$. D'où : $C_2 = \frac{5}{e^{-\frac{1}{2}} - 2e^{-1}}$. Et $C_1 = 5 - \frac{5}{e^{\frac{1}{2}} - 2} = \frac{5e^{\frac{1}{2}} - 15}{e^{\frac{1}{2}} - 2} = \frac{5\left(e^{\frac{1}{2}} - 3\right)}{e^{\frac{1}{2}} - 2}$

On en déduit : $\forall t > 0,\ y(t) = \frac{5\left(e^{\frac{1}{2}} - 3\right)}{e^{\frac{1}{2}} - 2}t + \frac{5}{e^{-\frac{1}{2}} - 2e^{-1}}e^{-\frac{1}{t}}$

Il suffit maintenant de calculer $y(3)$. $y(3) = \frac{15\left(e^{\frac{1}{2}} - 3\right)}{e^{\frac{1}{2}} - 2} + \frac{5}{e^{-\frac{1}{2}} - 2e^{-1}}e^{-\frac{1}{3}} \simeq 30$.

Au bout de trois secondes, le cavalier est à une abscisse de 30 mètres environ.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com