Retrouver le DL de tan

Ayoub Hajlaoui

Poignet, abri du sablier ;
Ma montre est belle et me régente.
Je l'ai appris mais oublié :
Fichu DL de la tangente !

Un élève en panique le jour J, qui se mettrait à la poésie

Je tiens à signaler que cet écrit ne relève en aucun cas d'un pressentiment de ma part quant au partiel de demain. Il se peut tout à fait que ce qui suit sera aussi inutile à ceux qui le liront qu'un Magicarpe face à la Ligue Pokémon. Mais voilà, je vous rappelle tout de même une manière de retrouver le DL en 0 de tan en cas d'oubli. Ca peut servir aussi d'échauffement en tant que produit de DL. Notez que ce n'est pas forcément la technique la plus efficace pour retrouver le DL de tan mais c'est une méthode purement calculatoire, accessible à tous.

Ils demandent le DL de tan en 0, disons à l'ordre 5.
Rappelons que pour tout réel x tel que $\cos(x) \neq 0$, et en particulier pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Or,

$$\begin{aligned} \sin(x) &\underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\ \cos(x) &\underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \end{aligned}$$

On a alors : $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)}$

On ne sait pas faire des quotients de DL, mais on sait faire des produits de DL. Du coup, il suffit si possible de faire le DL de $\frac{1}{\cos(x)}$ et ce sera bon.

$$\frac{1}{\cos(x)} \underset{0}{=} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}$$

Cool, vu que $-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, je peux utiliser le DL de $\frac{1}{1-y}$ en 0..

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-y} &\underset{0}{=} 1 + y + y^2 + o(y^2) \\ \text{Avec } y &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) \quad : \frac{1}{\cos(x)} \underset{0}{=} 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4) \end{aligned}$$

Oui attention, c'est bien un $o(x^4)$ à la fin. y étant équivalent à $\frac{x^2}{2}$, $o(y^2)$ est un $o(x^4)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(x)} &\underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4) \\ \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)} &\underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\right) \\ \text{Enfin, } \tan(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) = \underline{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)} \end{aligned}$$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com