Vers le supérieur

Version prépa ECG (maths approfondies)

Ayoub Hajlaoui

Avant-propos

Ce document comporte une vingtaine de problèmes mathématiques corrigés, tous extraits de sujets de concours de fin de CPGE (concours d'entrée aux grandes écoles), en filières ECS/ECE (très récents ancêtres de la filière ECG, jusqu'en 2022). Ils sont remaniés de sorte que le programme de Terminale (spécialité) est le seul prérequis pour en venir à bout. À cette fin, des questions intermédiaires ont parfois été ajoutées au sujet original. Les notions, définitions ou résultats qui pourraient manquer à l'élève pour parvenir à la résolution lui sont donnés en hypothèse, ainsi que des indications supplémentaires et remarques utiles.

La première originalité de ce document réside donc dans sa nature de pont entre le rivage du lycée et celui des concours. En se concentrant principalement sur des notions vues par l'élève l'an passé (suites, fonctions, intégrales, entre autres), il lui propose de les mobiliser pour faire tomber des questions de sujets de concours, montrant ainsi de manière pratique l'intérêt de bien maîtriser ces notions, de les voir comme des alliées de taille qui l'épauleront tout au long de la prépa, plutôt que de présenter leur révision comme une corvée estivale. En outre, de par les nouveautés introduites ça et là pour affiner ces dernières, de par un grand nombre de questions abordant des notions générales de raisonnement et d'ensembles, ce recueil donne au lycéen un avant-goût de la glorieuse chevauchée qui l'attend, en lui mettant le pied à l'étrier. Il lui rappellera certaines de ses errances de l'an passé, tout en le préparant à l'année à venir - sans prétendre constituer une liste exhaustive de ce qui y sera vu.

Si ces exercices ne nécessitent pas d'autre prérequis que le programme de Terminale, ils s'avéreront, en pratique, difficiles pour un élève au sortir du lycée. Le degré d'atsuce nécessaire, les idées qu'il faut avoir pour faire tomber telle ou telle question, détonnent avec la plupart des exercices rencontrés en Terminale, dont les pistes étaient en général plus claires, et les résolutions plus « téléphonées ».

C'est ici qu'intervient la seconde originalité de ce document par rapport à d'autres recueils d'exercices corrigés, originalité qui constitue son atout majeur : la correction, très détaillée, insiste autant que possible sur « le pourquoi de l'idée » , la question de l'apparition de la première étincelle : à quoi telle situation nous fait-elle penser ? pourquoi est-il judicieux d'emprunter telle voie, de penser à telle astuce à ce moment-là plutôt qu'à un autre ? quel écueil faut-il éviter et comment voir que c'est un piège ? Vous trouverez de telles considérations en italique, en parallèle de la correction à proprement parler. Autant de didascalies rythmant la pièce de théâtre mathématique aux premières loges de laquelle vous êtes convié. Lever de rideau.

L'auteur en quelques mots

Lauréat de l'agrégation externe de mathématiques en 2020 (64 ème sur 323 admis et 3069 inscrits), docteur en mathématiques appliquées (université Paris VI), diplômé de l'école d'ingénieurs des Mines de Nancy et du master recherche MVA (Maths Vision Apprentissage) de l'ENS Cachan, je donne des cours de mathématiques (particuliers et en groupe, niveau lycée à prépa/L3) depuis 2008. Je suis également colleur en MPSI au lycée Charlemagne (Paris), lycée où j'ai moi-même effectué mes années de prépa MPSI/MP.

Parallèlement, je rédige des exercices de mathématiques (principalement niveau prépa et Terminale) ainsi que des corrigés particulièrement détaillés, que vous pouvez consulter librement sur `www.ayoub-et-les-maths.com`. J'y explique à l'élève non seulement le cheminement, mais aussi et surtout pourquoi il doit avoir telle idée à tel moment, pourquoi telle autre idée n'est pas appropriée, quel piège il faut éviter ; cela, dans l'optique de l'entraîner au raisonnement réel, et non à la mimique maladroite qui est l'apanage du plus grand nombre.

Sur ma chaîne youtube « Ayoub et les maths », vous trouverez également bon nombre de vidéos d'exercices corrigés niveau Terminale et prépa (parmi ceux que j'ai donnés en colle notamment), des séries thématiques pour vous familiariser avec des notions spécifiques comme le signe somme, le calcul matriciel, la valeur absolue, ainsi que des conseils plus généraux pour vous améliorer en mathématiques. Et même, une série dénommée « Où est l'arnaque » : ce sont des exercices corrigés avec des erreurs de raisonnement volontaires - révélées en fin de vidéo, bien sûr - pour tester votre vigilance mathématique...

Table des matières

Introduction

Les problèmes présentés dans ce document sont de longueur et difficulté variables. Une évaluation de cette dernière, subjective, est précisée à titre indicatif en début de chaque problème :
(*) facile (**) moyen (***) difficile (****) particulièrement difficile
J'insiste sur le caractère subjectif de cette évaluation. Si elle s'appuie sur des paramètres tels la complexité des notions mises en oeuvre et le fait que les astuces à voir pour résoudre les questions de chaque exercice soient plus ou moins cachées, plus ou moins évidentes, l'observation empirique l'influence grandement : une sorte de moyenne vague de la difficulté ressentie par les nombreux élèves que j'ai pu côtoyer (cours particuliers, TD, colles...) face à un genre de question ou d'enchaînement de questions. Il s'agit aussi, pour moi, de comparer, en termes de difficulté, les exercices de ce document les uns aux autres.
Pas de panique, donc, si vous butez face à un exercice classé comme « moyen » ou « facile » . Faites de votre mieux dans le temps imparti, puis lisez attentivement la correction.

En parlant de temps : pour chaque problème, un temps de travail préconisé est indiqué. Il ne correspond pas forcément au temps au bout duquel l'exercice doit être résolu, mais plutôt au temps de recherche au bout duquel il devient raisonnable de commencer à regarder la correction. Il peut en effet être pertinent de vous imposer de réfléchir en temps limité, pour vous entraîner aux conditions d'examen. Mais si tel énoncé vous intrigue particulièrement, si vous vous sentez prêt de le faire tomber, si vous aimeriez en venir à bout (peut-être pour des raisons de fierté personnelle, peut-être pas), quitte à lui consacrer plus de temps que les autres, n'hésitez surtout pas. C'est en jouant de ces deux modes temporels que l'on peut s'améliorer durablement en mathématiques. Une telle idée est développée plus en détail dans cet article.

Chaque énoncé est suivi de « remarques sur l'énoncé ». Il ne s'agit nécessairement d'indications sur la résolution, mais plutôt de précisions sur les notations introduites par l'énoncé, ou de rappels de concepts mathématiques utiles.

La correction à proprement parler est en caractères normaux. Les passages en italique correspondent à des commentaires sur cette correction. Principalement, le fameux « pourquoi de l'idée » , cette substance fugace décrite tant bien que mal dans l'avant-propos. Mais aussi, par moments, des réflexions sur d'autres méthodes que celle choisie dans la correction, des analogies avec d'autres situations, des discussions sur telle ou telle erreur courante commise par les élèves à tel endroit. Plus rarement, deux ou trois confidences sur mes choix éditoriaux : pourquoi ai-je reformulé ainsi la question originellement présente dans le sujet ? Pourquoi ai-je ajouté telle question ? Vous mettre à la place du « concepteur » du sujet (même si le titre qui me conviendrait le mieux ici serait celui de reformulateur), tenter d'en comprendre la cohérence, vous attacher aux liens entre les questions et à leur fil conducteur peut vous aider à vous sortir du labyrinthe.

Place, maintenant, à de brèves considérations d'ordre général, qui seront complétées au besoin par les remarques sur chaque énoncé. Votre aventure mathématique dans le supérieur consistera en grande partie en la manipulation d'**assertions** . Ce sont des phrases syntaxiquement correctes (autrement dit, qui ont du sens) et qui sont soit vraies, soit fausses.

Comment ça, « soit vraies, soit fausses » ? N'est-ce pas trop général comme définition ? Toute phrase ne deviendrait-elle pas une assertion ?
Certainement pas, voyez plutôt :

- A : « $3^2 + 12 \times 7$ » n'est pas une assertion, car dire qu'elle serait vraie ou fausse n'aurait aucun sens.
- B : « $\forall x + \mathbb{R},\ x^2 \leq 2$ » n'est pas une assertion, car elle n'est pas syntaxiquement correcte.
- C : « $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 > 0$ » est une assertion. C'est même une assertion vraie.
- D : « $\exists x \in \mathbb{R},\ e^x \leq 0$ » est une assertion. C'est une assertion fausse.
- D : « $x + 7 \geq 2$ » est une assertion. C'est une assertion dont la véracité dépend du choix du paramètre x. Pour l'anecdote, une telle assertion est appelée un prédicat.

Rappelons la signification des symboles $\forall$ et $\exists$:

- $\forall$ signifie : « pour tout », ou encore « quel que soit ». L'assertion C se lit donc : « pour tout réel x non nul, $x^2 > 0$ ». Ou encore, de manière équivalente : « quel que soit le réel x non nul, $x^2 > 0$ »

- $\exists$ signifie « il existe ». L'assertion D se lit donc : « il existe un réel x tel que $e^x \leq 0$ » Voyez comment j'ai intercalé un « tel que » à la place de la virgule, pour que la phrase ait du sens en français.

Si A et B sont deux assertions mathématiques, « $A \Longrightarrow B$ » (se lit « A implique B ») veut dire que si A est vrai, alors B est vrai.
Autrement dit, A est une condition suffisante à B.
Il suffit que A soit vrai pour que B soit vrai.
Autrement dit, B est une condition nécessaire à A.
A ne peut pas être vrai sans que B ne soit vrai.

« $A \Longleftrightarrow B$ » (se lit « A équivaut à B » ou « A est équivalent à B ») veut dire que nous avons à la fois $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$. Autrement dit : A est vrai si et seulement si B est vrai.

La négation de « $A \Longrightarrow B$ » , notée non$(A \Longrightarrow B)$, est « A et non(B) ».
Autrement dit, A n'entraîne pas B puisque A est réalisé mais pas B

Exercice 1

De classiques questions pour vous mettre en confiance
et que nous avancions dénués d'impatience.

Énoncé : (temps conseillé : 35 min) (**) *d'après EDHEC 2016 ECS*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$

1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer ses limites aux bornes de son intervalle de définition.

2) Etudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = e^{-x} - x^2$

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$. On notera α cette solution.

4) Montrer que $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$

Remarques sur l'énoncé :

Rappelons au cas où que $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des réels positifs. C'est donc $[0;+\infty[$
Quant à $\mathbb{R}_+^*$, c'est l'ensemble des réels positifs non nul. C'est donc l'ensemble des réels strictement positifs, c'est-à-dire $]0;+\infty[$.

Correction de l'exercice 1 :

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par composée et quotient de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{-e^{-x} \times x - e^{-x} \times 1}{x^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2} \quad \textit{(factorisation pour mieux voir le signe)}$$

N'oubliez pas dans quel ensemble se situe x...
Pour tout $x > 0$, $x + 1 > 0$, $x^2 > 0$, et $e^{-x} > 0$
(la dernière inégalité étant même vraie pour tout réel x)

Donc, pour tout $x > 0$, $f'(x) < 0$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Reste à calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} -x = 0$ donc, par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$ (et en particulier en 0) : $\lim\limits_{x \to 0} e^{-x} = e^0 = 1$. Et : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ « $\frac{1}{0^+}$ », *si vous voulez...*

Par produit de limites : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ donc, par composition de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$.
Et : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Enfin, par produit de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Toujours essayer un calcul de limite direct, avant de se mettre à tenter de lever des indéterminations qui, parfois, n'existent que dans notre tête. (Bien évidemment, la plupart des questions portant sur des limites met en jeu des formes indéterminées, mais il serait dommage de se mettre inutilement dans l'impasse lorsque ce n'est pas le cas)

2) *Bien entendu, on peut dériver g, étudier le signe de g'..., mais ici, on n'est même pas obligé de passer par une dérivation. Voyez plutôt :*

La fonction $x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc, par composition avec la fonction exponentielle strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier sur $\mathbb{R}_+$.
D'autre part, la fonction carré étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto -x^2$

est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. *(on a multiplié la fonction carré par $-1<0$)*
Par somme des fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto -x^2$ strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+$, la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Une somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante ne nous aurait pas permis de conclure. Un produit de deux fonctions ne nous aurait pas permis de conclure. Même un produit de deux fonctions croissantes : tenez, faites le produit avec elle-même de la fonction $x \mapsto x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et vous obtenez la fonction carré, certainement pas croissante sur $\mathbb{R}$!)

3) *Ca sent le corollaire du théroème des valeurs intermédiaires (ou théorème de la bijection) à plein nez. Sauf qu'il faudrait « = constante » plutôt que « = x » pour pouvoir l'appliquer...*
Dès lors, que faire de ce x ? Le passer de l'autre côté par soustraction ? Un coup d'oeil à la fonction g me permet de me rendre compte que ce ne serait pas le déplacement le plus intéressant ici...

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f(x) = x \iff \dfrac{e^{-x}}{x} = x \iff e^{-x} = x^2 \iff e^{-x} - x^2 = 0 \iff g(x) = 0$

Et bien voilà une formulation plus intéressante pour utiliser le corollaire du TVI ! Avant d'aller plus loin, petite remarque sur la rédaction.
Lorsque j'écris : « Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f(x) = x \iff \dfrac{e^{-x}}{x} = x$ », je ne dis certainement pas : « pour tout $x > 0$, on a $f(x) = x$, c'est-à-dire que l'on a $\dfrac{e^{-x}}{x} = x$ »
Non, je dis que, pour tout $x > 0$, l'égalité $f(x) = x$ est vraie si et seulement si l'égalité $\dfrac{e^{-x}}{x} = x$ est vraie. Autrement dit, pour tout $x > 0$, ces deux égalités (et en fait toutes les égalités qui ont suivi, reliées par le signe $\iff$), sont équivalentes.
D'où l'importance d'utiliser les symboles $\iff$ et $\implies$ à bon escient, uniquement dans les situations qui s'y prêtent. Plus de détails dans cet article.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$ (par composée et somme de fonctions continues).
De plus, d'après 2), g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
On n'oublie surtout pas de calculer les valeurs (ou limites) aux bornes.
$g(0) = e^{-0} - 0^2 = 1$ et, par calcul direct de limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$
Vous serez parfois amené à écrire : $g\left(]0;+\infty[\right) =]-\infty;1[$
Enfin : $0 \in]-\infty\,;1[$.

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires nous permet donc de conclure que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
Cette équation étant équivalente, sur $\mathbb{R}_+^*$, à l'équation $f(x)=x$, nous pouvons finalement affirmer que $\boxed{\text{l'équation } f(x)=x \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}_+^*.}$

4) *Il s'agit tout simplement de comparer* $g\left(\frac{1}{e}\right)$, $g(\alpha)$ *(c'est-à-dire* 0*) et* $g(1)$

Plus précisément, il s'agirait de montrer que $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0 > g(1)$*, puis de conclure grâce à la stricte décroissance de* g*.*

$g\left(\frac{1}{e}\right) = \exp\left(-\frac{1}{e}\right) - \left(\frac{1}{e}\right)^2$ *La notation* $\exp\left(-\frac{1}{e}\right)$ *est plus commode que* $e^{-\frac{1}{e}}$*...*

$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\exp(\frac{1}{e})} - \frac{1}{e^2} = \frac{1}{\exp(\frac{1}{e})} - \frac{1}{\exp(2)}$. *Comparons donc* $\frac{1}{e}$ *et* 2*...*

On sait : $\frac{1}{e} < 2$ (car $\frac{1}{e} < 1 < 2$)
Donc, par stricte croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$: $\exp(\frac{1}{e}) < \exp(2)$.

Les deux membres de l'inégalité précédente sont strictement positifs, et nous permettent donc ce qui va suivre.

Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$: $\frac{1}{\exp(\frac{1}{e})} > \frac{1}{\exp(2)}$
Autrement dit : $\frac{1}{\exp(\frac{1}{e})} - \frac{1}{\exp(2)}$, c'est-à-dire : $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0$.

D'autre part, $g(1) = e^{-1} - 1^2 = e^{-1} - 1 = e^{-1} - e^0$
Or : $-1 < 0$. Donc, par stricte croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$: $e^{-1} < e^0$. D'où : $g(1) < 0$.

Nous avons donc montré : $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0 > g(1)$

C'est-à-dire : $g\left(\frac{1}{e}\right) > g(\alpha) > g(1)$

La stricte décroissance de g sur $\mathbb{R}_+$ nous permet enfin de conclure : $\boxed{\frac{1}{e} < \alpha < 1}$

Exercice 2

Face aux nombreuses lettres, la main novice tremble
mais restez-en le maître. Vérifiez vos ensembles.

Énoncé : (temps conseillé : 20 min) (**) *d'après HEC 2017 ECE*

Soient a et b deux réels strictement positifs. Soit $G_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $G_{a,b}(x) = \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right)$

1) Soit $y \geq 0$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $ax + \dfrac{b}{2}x^2 = y$

2) Soit $u \in \left]0;1\right]$. Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation $G_{a,b}(x) = u$.

Remarques sur l'énoncé :

Toutes ces lettres ne doivent pas vous inquiéter. Quand on vous demande de résoudre une équation, demandez-vous calmement qui en est l'inconnue.

Correction de l'exercice 2 :

1) *Mettons-nous d'accord tout de suite : cette équation est bien évidemment d'inconnue x. Quant à y, c'est un réel positif posé au départ.*

Pour tout réel x : $\quad ax+\dfrac{b}{2}x^2=y \iff \dfrac{b}{2}x^2+ax-y=0$

L'équation de départ est équivalente à cette reformulation, plus intéressante... En effet, on reconnaît maintenant une équation du second degré, mais il va falloir le justifier, même rapidement.

$b>0$ donc $\dfrac{b}{2}\neq 0$. L'équation $\dfrac{b}{2}x^2+ax-y=0$ d'inconnue x est donc une équation du second degré.
Si on avait $\dfrac{b}{2}=0$, l'équation serait devenue $ax-y=0$: rien à voir avec du second degré...

Son discriminant est : $\Delta=a^2-4\times\dfrac{b}{2}\times(-y)=a^2+2by$, avec $a^2>0$ (car $a\neq 0$), $b>0$ et $y\geq 0$. On a donc $\Delta>0$

L'équation $\dfrac{b}{2}x^2+ax-y=0$ admet donc deux solutions distinctes :

$x_1=\dfrac{-a-\sqrt{\Delta}}{2\times\frac{b}{2}}=\dfrac{-a-\sqrt{a^2+2by}}{b}$ et $x_2=\dfrac{-a+\sqrt{a^2+2by}}{b}$.

Ne vous emmêlez pas les pinceaux sur les lettres : nous avons tous appris $\Delta=b^2-4ac$, $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, mais le tout est de savoir qui est qui ici.
Ne soyez pas prisonnier des lettres ; attachez-vous plutôt à ce qu'elles désignent.

Finalement, quel que soit $y>0$, l'équation $ax+\dfrac{b}{2}x^2=y$ d'inconnue x admet exactement deux solutions réelles : $x_1=\dfrac{-a-\sqrt{a^2+2by}}{b}$ et $x_2=\dfrac{-a+\sqrt{a^2+2by}}{b}$

2) *Attention aux ensembles spécifiés... Il y a peu de risque que vous oubliiez l'intervalle dans lequel se situe u. Par contre, n'oubliez pas que vous résolvez l'équation sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire sur $[0;+\infty[$.*

Pour tout réel positif x :

$G_{a,b}(x) = u \iff \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) = u \iff -ax - \frac{b}{2}x^2 = \ln(u)$
La dernière équivalence est valable car $u > 0$

$-ax - \frac{b}{2}x^2$*... Voilà qui devrait vous rappeler quelque chose ! Peut-être à un signe près...*

D'où : $G_{a,b}(x) = u \iff ax + \frac{b}{2}x^2 = -\ln(u)$

Là, pas question de remettre les mains dans le cambouis du calcul, si je l'ai déjà fait... J'ai envie d'utiliser le résultat de la question 1), valable pour n'importe quel $y \geq 0$*. Oui mais là, c'est* $-\ln(u)$ *qui jouerait le rôle de* y*. D'où la nécessité de justifier qu'il est positif.*

$u \in]0;1]$. Donc (comme $\ln(1) = 0$, et par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$) $\ln(u) \leq 0$.
Donc $-\ln(u) \geq 0$.
En prenant $y = -\ln(u)$, le résultat de 1) nous permet d'affirmer que l'équation $ax + \frac{b}{2}x^2 = -\ln(u)$ admet exactement deux solutions réelles :
$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 2b\ln(u)}}{b}$ et $x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ln(u)}}{b}$

Et là, attention à ne pas oublier que l'on cherche les solutions positives...

$a > 0$, $b > 0$ et $\sqrt{a^2 - 2b\ln(u)} \geq 0$ donc $x_1 < 0$.
Pour x_2, il faut s'intéresser au signe de $-a + \sqrt{a^2 - 2b\ln(u)}$
$b\ln(u) \leq 0$ donc $-2b\ln(u) \geq 0$, et donc $a^2 - 2b\ln(u) \geq a^2$.
Par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$, on obtient : $\sqrt{a^2 - 2b\ln(u)} \geq \sqrt{a^2} = a$ (car $a > 0$)
On a donc : $\sqrt{a^2 - 2b\ln(u)} - a \geq 0$, c'est-à-dire : $-a + \sqrt{a^2 - 2b\ln(u)} \geq 0$, et enfin : $x_2 \geq 0$

Finalement, quel que soit $u \in]0;1]$, l'équation $G_{a,b}(x) = u$ d'inconnue x admet exactement une solution sur $\mathbb{R}_+$: $x = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ln(u)}}{b}$

Autrement dit, tout réel u *de l'intervalle* $]0;1]$ *admet un unique antécédent dans* $\mathbb{R}_+$ *par l'application* $G_{a,b}$*.*

Nous savons même exprimer cet antécédent en fonction de u *: c'est* $\frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ln(u)}}{b}$

L'an prochain, vous direz que l'application $G_{a,b} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow &]0;1] \\ x & \longmapsto & \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right) \end{array}$

est bijective et que sa bijection réciproque est $G_{a,b}^{-1} : \begin{array}{ccc}]0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ u & \longmapsto & \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ln(u)}}{b} \end{array}$

$G_{a,b}^{-1}$ est tout simplement l'application qui « fait le travail dans l'autre sens que $G_{a,b}$ » : à tout élément u de $]0;1]$, $G_{a,b}^{-1}$ associe l'unique antécédent de u dans $\mathbb{R}_+$ par $G_{a,b}$.

Exercice 3

Que la plume s'apprête, que la lutte commence :
si l'intégrale inquiète, revenez à son sens.

Énoncé : (temps conseillé : 40 min) (***) *d'après EM Lyon 2019 ECS*

On admettra le résultat suivant :
si $[a;b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, et si f est une fonction continue sur $[a;b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes sur $[a;b]$. Autrement dit, il existe alors x_1 et x_2 appartenant à $[a;b]$ tels que : $\forall x \in [a;b],\ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.
C'est le théorème des bornes atteintes.

On considère une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose, pour tout x de $\mathbb{R}$: $h(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$

1) Justifier que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, que h' est continue sur $\mathbb{R}$ et préciser, pour tout réel x, $h'(x)$

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier qu'il existe deux réels α_x et β_x appartenant à $[0;x]$ tels que :

$$\frac{x^2}{2}f(\alpha_x) \leq h(x) \leq \frac{x^2}{2}f(\beta_x)$$

3) En déduire : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$

Remarques sur l'énoncé :

« h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et h' est continue sur $\mathbb{R}$ » peut se dire de manière plus courte : « h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ». Et, plus généralement :

soit I une partie de $\mathbb{R}$ et soit k un entier naturel non nul. Une fonction est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur I lorsqu'elle est dérivable (au moins) k fois sur I, et que sa dérivée k-ième (c'est-à-dire la fonction obtenue en la dérivant k fois) est continue sur I.

« Au moins » est sous-entendu dans la définition. Lorsque je dis « f est dérivable 3 fois », cela n'interdit pas qu'elle le soit 8 fois... Petite analogie : lorsque le théorème des valeurs intermédiaires (et non son corollaire) vous permet de conclure quant à l'existence d'une solution de votre équation sur un intervalle donné, il n'interdit pas qu'il puisse y en avoir d'autres. Encore une fois, « au moins » est sous-entendu.

Correction de l'exercice 3 :

1) *Commençons par bien faire attention au fait que la variable dans l'expression de la fonction h est x, et non t. t est juste la variable muette sous le signe intégrale. On aurait tout aussi bien pu écrire :* $h(x)=\int_0^x uf(u)\,du$ *ou* $h(x)=\int_0^x zf(z)\,dz$
Dès lors, si l'on dérive, c'est par rapport à x. Mais comment gérer le fait que x se situe sur une borne de l'intégrale ? En revenant à ce que cette intégrale signifie... Intéressons-nous donc à la fonction que nous intégrons.

La fonction $g : t \mapsto tf(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par produit de telles fonctions (f étant continue sur $\mathbb{R}$ par hypothèse). Elle admet donc une primitive G sur $\mathbb{R}$ et, par définition : $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = \Big[G(t)\Big]_0^x = G(x)-G(0)$. Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x)=G(x)-G(0)$

G est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car c'est une primitive de g sur $\mathbb{R}$) et $G'=g$ continue sur $\mathbb{R}$.
Et G et h sont égales à une constante près.
Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et h' est continue sur $\mathbb{R}$.
Et : $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x)=G'(x)$ *Ne surtout pas écrire $G'(x)-G'(0)$, car $G(0)$ est une constante !*
Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x)=g(x)=xf(x)$. Finalement, pour tout réel x, $h'(x)=xf(x)$

2) *L'énoncé de la question nous fait penser à l'énoncé du théorème des bornes atteintes...*

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori (*à plus forte raison*) sur le segment $[0;x]$

x étant un réel (strictement) positif, on peut bien parler du segment $[0;x]$.. Ca n'aurait pas eu de sens de parler du segment $[0;-2]$ par exemple.

D'après le théorème des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses bornes sur $[0;x]$. Il existe donc deux réels α_x et β_x appartenant à $[0;x]$ tels que :
$\forall t \in [0;x],\ f(\alpha_x) \leq f(t) \leq f(\beta_x)$ *α_x et β_x parce qu'a priori, ils dépendent de x*

Voilà qui nous met le pied à l'étrier pour pouvoir encadrer $h(x)$...

Pour tout t appartenant à $[0;x]$, $t \geq 0$. Donc, en multipliant les membres de l'encadrement précédent par t : $tf(\alpha_x) \leq tf(t) \leq tf(\beta_x)$

Les bornes de l'intégrale de 0 à x sont bien dans le sens croissant...
Par croissance de l'intégrale sur $[0;x]$, $\int_0^x tf(\alpha_x)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x tf(\beta_x)\,\mathrm{d}t$

Ouf, le terme central n'est autre que $h(x)$! Mais que faire de celui de gauche et celui de droite ? On est censés se débrouiller pour faire disparaître leurs intégrales...
Commençons par constater que $f(\alpha_x)$ et $f(\beta_x)$ ne dépendent pas de t, et sont donc des constantes du point de vue de cette intégration...

Par suite : $f(\alpha_x)\int_0^x t\,\mathrm{d}t \leq h(x) \leq f(\beta_x)\int_0^x t\,\mathrm{d}t$. Or : $\int_0^x t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{x^2}{2}$

Pour $x > 0$, on a bien montré l'existence de deux réels α_x et β_x appartenant à $[0;x]$ tels que : $\frac{x^2}{2}f(\alpha_x) \leq h(x) \leq \frac{x^2}{2}f(\beta_x)$

3) Soit $x > 0$. D'après 2), il existe deux réels α_x et β_x appartenant à $[0;x]$ tels que : $\frac{x^2}{2}f(\alpha_x) \leq h(x) \leq \frac{x^2}{2}f(\beta_x)$. D'où (en divisant par $x^2 > 0$) : $\frac{f(\alpha_x)}{2} \leq \frac{h(x)}{x^2} \leq \frac{f(\beta_x)}{2}$

Et là, pour avoir la limite en 0 du membre central, on a envie de calculer les limites en 0 des membres de gauche et de droite. Mais attention, l'encadrement n'est valable que pour $x > 0$. La limite obtenue (par théorème des gendarmes, par exemple), ne pourra qu'être une limite en 0^+ (c'est-à-dire lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, autrement dit en restant supérieur à 0)

$\alpha_x \in [0;x]$ et $\beta_x \in [0;x]$. Formulé autrement : $0 \leq \alpha_x \leq x$ et $0 \leq \beta_x \leq x$
Le théorème des gendarmes nous permet donc d'affirmer : $\lim\limits_{x\to 0^+} \alpha_x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \beta_x = 0$.

Que dire, dès lors, des limites en 0^+ de $f(\alpha_x)$ et $f(\beta_x)$? Attention à ne pas manquer un argument phare...

$\lim\limits_{x\to 0^+} \alpha_x = 0$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ (donc a fortiori f est continue en 0).
D'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(\alpha_x) = f(0)$. Et de même : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(\beta_x) = f(0)$.
Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(\alpha_x)}{2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(\beta_x)}{2} = \frac{f(0)}{2}$.

De l'encadrement $\frac{f(\alpha_x)}{2} \leq \frac{h(x)}{x^2} \leq \frac{f(\beta_x)}{2}$ valable pour tout $x > 0$, et des limites que nous venons d'obtenir, le théorème des gendarmes permet de conclure : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$

Il faut bien avoir conscience du fait que l'on n'a pas encore le résultat demandé. Pour y parvenir, il nous faut encore prouver : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{h(x)}{x^2} = \dfrac{f(0)}{2}$.
Mais il n'y a pas de difficulté particulière à cela, en procédant de manière similaire à ce qui a été fait pour la limite en 0^+. *Seul bémol : pour* $x < 0$, *il faudra faire attention à travailler sur* $[x;0]$ *et non* $[0;x]$

Soit $x < 0$. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le segment $[x;0]$.
D'après le théorème des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses bornes sur $[x;0]$. Il existe donc deux réels α_x et β_x de $[x;0]$ tels que : $\forall t \in [x;0],\ f(\alpha_x) \leq f(t) \leq f(\beta_x)$

Pour tout t appartenant à $[x;0]$, $t \leq 0$. Donc, en multipliant les membres de l'encadrement précédent par t : $tf(\alpha_x) \geq tf(t) \geq tf(\beta_x)$
Contrairement à tout à l'heure, $t \leq 0$, *donc on change le sens des inégalités.*

Par croissance de l'intégrale sur $[x;0]$, $\displaystyle\int_x^0 tf(\alpha_x)\,\mathrm{d}t \geq \int_x^0 tf(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_x^0 tf(\beta_x)\,\mathrm{d}t$

Si l'on veut les intégrales de 0 *à* x, *il suffit de multiplier par* -1, *qui est négatif*

Il s'ensuit : $\displaystyle\int_0^x tf(\alpha_x)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x tf(\beta_x)\,\mathrm{d}t$

On obtient donc exactement le même encadrement qu'en 2)!! Rien ne change au niveau du calcul d'intégrale.
De même qu'en 2), on a montré, pour tout $x < 0$, l'existence de deux réels α_x et β_x appartenant à $[x;0]$ tels que $\dfrac{x^2}{2}f(\alpha_x) \leq h(x) \leq \dfrac{x^2}{2}f(\beta_x)$, c'est-à-dire tels que :
$\dfrac{f(\alpha_x)}{2} \leq \dfrac{h(x)}{x^2} \leq \dfrac{f(\beta_x)}{2}$
Et, de même qu'en 0^+, par continuité de f en 0 : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(\alpha_x)}{2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(\beta_x)}{2} = \dfrac{f(0)}{2}$

Le théorème des gendarmes nous permet cette fois de conclure : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{h(x)}{x^2} = \dfrac{f(0)}{2}$

Nous avons donc montré : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{h(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{h(x)}{x^2} = \dfrac{f(0)}{2}$.

Nous en déduisons finalement : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x)}{x^2} = \dfrac{f(0)}{2}}$

Exercice 4

Nier l'implication, c'est savoir concilier
l'absence du second et l'accompli premier.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min) (****) *d'après ESSEC 2017 ECS*

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit a un réel appartenant à E.
On dit que a est un point extrémal de E lorsque : $\forall\,(x,y)\in E^2,\ \dfrac{x+y}{2}=a \Longrightarrow x=y=a$

1) Montrer que $]0;1[$ n'admet aucun point extrémal.
2) Montrer que les points extrémaux de $[0;1]$ sont 0 et 1.

Remarques sur l'énoncé :

Rappelons, au cas où, la signification des symboles mis en jeu :

- $\forall$ signifie : « pour tout », ou encore « quel que soit ».
- $\in$ signifie « appartient ».

Par exemple, $\forall x\in\mathbb{R}$ se lit : « pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ ». Ou encore, de manière équivalente : « quel que soit x appartenant à $\mathbb{R}$ ». (Ou encore : « pour tout réel x »)

Si E est un ensemble, E^2 est l'ensemble des couples d'éléments appartenant à E.
Autrement dit, E^2 est l'ensemble des (a,b) avec $a\in E$ et $b\in E$.
On note : $E^2=\{(a,b), a\in E, b\in E\}$.
Dire « $\forall\,(x,y)\in E^2$ » revient donc à dire « $\forall\,x,y\in E$ »

Si A et B sont deux assertions mathématiques (revoir la définition ici) :
« $A\Longrightarrow B$ » (se lit « A implique B ») veut dire que si A est vrai, alors B est vrai.
Autrement dit, A est une condition suffisante à B.
Il suffit que A soit vrai pour que B soit vrai.
Autrement dit, B est une condition nécessaire à A.
A ne peut pas être vrai sans que B ne soit vrai.

La négation de « $A\Longrightarrow B$ » , notée non$(A\Longrightarrow B)$, est « A et non(B) ».
Autrement dit, A n'entraîne pas B puisque A est réalisé mais pas B

Correction de l'exercice 4 :

1) Dans cette question, $E =]0;1[$. On veut montrer que pour tout $a \in E$, a n'est pas un point extrémal de E.

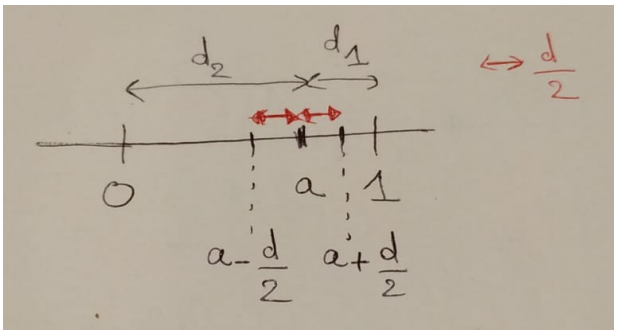
Autrement dit, on veut montrer que, pour tout $a \in E$, la proposition :
« $\forall\ (x,y) \in E^2,\ \dfrac{x+y}{2} = a \Longrightarrow x = y = a$ » est fausse.
Autrement dit, on veut montrer que, pour tout $a \in E$, la négation :
$Non\left(\text{« } \forall\ (x,y) \in E^2,\ \dfrac{x+y}{2} = a \Longrightarrow x = y = a \text{ »}\right)$ est vraie.

Le contraire de « tout chat a un pelage gris » est intuitivement : « il existe un chat qui n'a pas un pelage gris ». Plus généralement, suivant cette même logique, le contraire de « pour tout x appartenant à X, la proposition $P(x)$ est vraie » est « il existe un x appartenant à X tel que la proposition $P(x)$ soit fausse. »

Soit $a \in E =]0;1[$.
On veut montrer qu'il existe un couple (x,y) de E^2 tel que $\text{Non}\left(\text{« } \dfrac{x+y}{2} = a \Longrightarrow x = y = a \text{ »}\right)$ soit vérifié, c'est-à-dire tel que $\dfrac{x+y}{2} = a$ et, en même temps, $\text{Non}(x = y = a)$

On cherche donc deux éléments x et y de $]0;1[$ qui ne soient pas tous les deux égaux à a, et dont la moyenne (algébrique) serait égale à a. Il suffit de prendre deux éléments assez proches de a (pour rester dans $]0;1[$) et à égale distance de a.
Mais le concept d'« assez proches de a pour rester dans $]0;1[$ » risque de dépendre de a...

Considérons la distance de a à 1 : $d_1 = 1 - a > 0$ et la distance de a à 0 : $d_2 = a - 0 = a > 0$
Et posons $d = \min(d_1, d_2)$ *(d est tout simplement la plus petite de ces deux distances)*



(Ici, $d = d_1$)

Montrons alors que : $x = a + \frac{d}{2} \in]0;1[$ et $y = a - \frac{d}{2} \in]0;1[$.
$0 < \frac{d}{2} \leq \frac{d_1}{2} < d_1$ donc $0 < \frac{d}{2} < d_1$ donc (en ajoutant a) $a < a + \frac{d}{2} < a + d_1 = a + 1 - a = 1$
On a montré : $a < a + \frac{d}{2} < 1$. En particulier : $0 < a + \frac{d}{2} < 1$, c'est-à-dire : $a + \frac{d}{2} \in]0;1[$

Et $0 < \frac{d}{2}‘ \leq \frac{d_2}{2} < d_2$ donc $0 < \frac{d}{2} < d_2$ donc (en multipliant par $-1 < 0$) : $0 > -\frac{d}{2} > -d_2$
D'où : $a > a - \frac{d}{2} > a - d_2 = a - a = 0$.
On a montré : $0 < a - \frac{d}{2} < a$. En particulier : $0 < a - \frac{d}{2} < 1$, c'est-à-dire : $a - \frac{d}{2} \in]0;1[$

De plus, $\frac{x+y}{2} = \frac{a + \frac{d}{2} + a - \frac{d}{2}}{2} = \frac{2a}{2} = a$

On a bien montré l'existence de deux réels x et y de E tels que $\frac{x+y}{2} = a$ et tels que l'on n'ait pas : $x = y = a$. a n'est donc pas un point extrémal de $E =]0;1[$.
La démonstration étant valable quel que soit a appartenant à $]0;1[$, nous avons bien montré ce qui suit : $]0;1[$ n'admet aucun point extrémal.

Je n'étais pas obligé de donner un nom à d_1 et d_2. J'aurais pu tout de suite balancer a et $1-a$. C'était pour visualiser cette idée de prendre la plus petite des deux distances. Par ailleurs, on aurait aussi bien pu prendre $x = a + \frac{d}{3}$ et $y = a + \frac{d}{3}$. Plus généralement, $x = a + h$ et $y = a - h$ conviennent pour tout h strictement compris entre 0 et d...

2) On peut montrer de la même manière qu'en 1) qu'aucun réel de $]0;1[$ n'est un point extrémal de $[0;1]$. En effet, la démonstration de 1) permet d'exhiber, pour tout réel a de $]0;1[$, deux réels x et y de $]0;1[$ (donc de $[0;1]$) différents de a tels que $\frac{x+y}{2} = a$ et tels que l'on n'ait pas $x = y = a$.

Reste donc à montrer que 0 et 1 sont deux points extrémaux de $[0;1]$ (et ce seront alors bien les seuls).
Pour tous $x, y \in [0;1]$, si $\frac{x+y}{2} = 0$, alors $x + y = 0$. x et y sont alors deux réels positifs dont la somme est nulle. Donc $x = y = 0$. Cela prouve que 0 est un point extrémal de $[0;1]$.
Pour tous $x, y \in [0;1]$, si $\frac{x+y}{2} = 1$, alors $x + y = 2$. x et y sont alors deux réels inférieurs ou égaux à 1 dont la somme est 2. Donc nécessairement, $x = y = 1$. Cela prouve que 1 est un point extrémal de $[0;1]$.
En conclusion : les (seuls) points extrémaux de $[0;1]$ sont 0 et 1.

Exercice 5

Apprends à définir proprement « convergence » ,
et tu pourras sortir élève de l'enfance

Énoncé : (temps conseillé : 20 min) (***) *d'après ESSEC Maths I 2012 ECE*

On rappelle qu'une suite (u_n) converge vers un réel l si et seulement si :
$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_\epsilon\ , |u_n - l| < \epsilon$

Soit $l > 0$, et soit (u_n) une suite telle que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, u_n = l$. Montrer que (u_n) est positive à partir d'un certain rang.

Remarques sur l'énoncé :

Rappelons, au cas où, la signification des symboles mis en jeu :

- $\forall$ signifie : « pour tout », ou encore « quel que soit ».
- $\exists$ signifie : « il existe »
- $\in$ signifie « appartient ».

La définition de convergence avec les quantificateurs rappelée par l'énoncé est rarement présentée en Terminale (ou alors, de manière succinte, sans insister dessus). A moins que vous ne soyez particulièrement familiers avec cette définition, et que vous n'ayez eu l'occasion de la manipuler assez, cet énoncé, bien que court, risque de vous donner du fil à retordre...

« $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_\epsilon\ , |u_n - l| < \epsilon$ » donne, en français : « pour tout réel epsilon strictement positif, il existe un entier naturel N_ϵ tel que pour tout (entier naturel) n supérieur ou égal à ce N_ϵ , $|u_n - l| < \epsilon$ (autrement dit la distance entre u_n et l est inférieure à ϵ) ».
Dire $|u_n - l| < \epsilon$ revient à dire $l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$

L'idée est donc la suivante : les termes de la suite peuvent être rendus aussi proches que l'on veut de l à condition de prendre des rangs n assez grands.

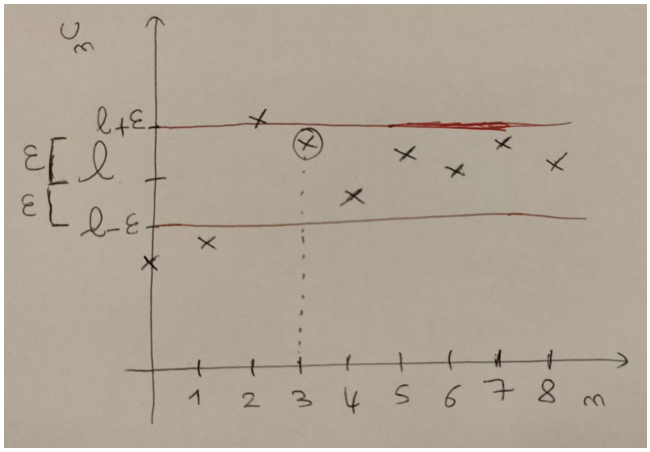


Schéma à main levée (je pense que ça se voit...) représentant les premiers termes d'une suite (u_n) convergeant vers l

Le schéma ci-dessus est censé représenter les premiers termes d'une suite convergeant vers l. Quel que soit le « faisceau » de rayon non nul ($\epsilon > 0$) centré autour de l (correspondant à l'intervalle $]\, l-\epsilon;\ l+\epsilon\, [$ en ordonnée), il existe un rang N_ϵ à partir duquel tous les termes de la suite sont emprisonnés dans le faisceau.
Et ce, quel que soit le rayon ϵ du faisceau, du moment qu'il est non nul...
Dans cet exemple, pour le ϵ de la figure, $N_\epsilon = 3$ semble convenir (tous les entiers supérieurs ou égaux à 3 aussi, d'ailleurs...). Pour tous les n supérieurs ou égaux à ce N_ϵ, on voit effectivement : $l-\epsilon < u_n < l+\epsilon$ (autrement dit, $-\epsilon < u_n - l < \epsilon$, ce qui équivaut à dire : $|u_n - l| < \epsilon$)

Une variante légèrement plus rigoureuse de l'écriture avec les quantificateurs (bien que la précédente soit couramment utilisée et tolérée) est :
$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq N_\epsilon \implies |u_n - l| < \epsilon$
Pourquoi plus rigoureuse ? Parce que dans la première, lorsqu'on écrit $\forall n \geq N_\epsilon$, on n'indique pas la nature du n en question. Un correcteur de mauvaise foi pourrait faire semblant de comprendre que les n dont on parle seraient des réels en général (alors que le contexte indique clairement que ce sont plus précisément des entiers naturels mais bon, que pouvons-nous contre la mauvaise foi...)

Enfin, vous pourrez rencontrer d'autres variantes de cette définition parlant plutôt de N au lieu de N_ϵ (ce qui est tout à fait permis, mais j'aime bien N_ϵ, ça nous rappelle que ce rang dépend de ϵ), ou encore mettant un signe $\leq$ à la place de $<$ (ce qui ne change rien à la définition, grâce au $\forall\ \epsilon$ du début)

Correction de l'exercice 5 :

Ici, la suite qui converge est non pas (u_n)*, mais* $(\sqrt{n}\,u_n)$*. Autrement dit (si on veut lui donner un nom), la suite* (v_n) *définie par :* $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sqrt{n}\,u_n$
La définition de la convergence fournit ici : $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_\epsilon\ , |\sqrt{n}\,u_n - l| < \epsilon$
Dit autrement : $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_\epsilon\ ,\ l - \epsilon < \sqrt{n}\,u_n < l + \epsilon$

Certes, mais que faire de tout ça ? Comment prouver que (u_n) *est positive à partir d'un certain rang ? La définition de la convergence commence par* $\forall\ \epsilon > 0$*... Autrement dit, nous pouvons appliquer la propriété pour n'importe quel* $\epsilon > 0$*...*

En particulier, en choisissant $\epsilon = \dfrac{l}{2}$:
$l > 0$ *donc* $\dfrac{l}{2} > 0$*, donc j'ai tout à fait le droit de faire ce choix de* ϵ*. Mais pourquoi ce choix ? Pour m'assurer qu'à partir du rang* N *dont l'existence m'est garantie par la définition,* $\sqrt{n}\,u_n$ *(et donc* u_n*) sera positif. Voyez plutôt :*
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ l - \dfrac{l}{2} < \sqrt{n}\,u_n < l + \dfrac{l}{2}$
J'ai pris la liberté de l'appeler N *et pas* $N_{\frac{l}{2}}$*...*

Nous avons donc : $\forall n \geq N, \dfrac{l}{2} < \sqrt{n}\,u_n < \dfrac{3l}{2}$. En particulier : $\forall n \geq N,\ 0 < \dfrac{l}{2} < \sqrt{n}\,u_n$

Donc : $\forall n \geq N,\ 0 < \sqrt{n}\,u_n$. Il s'ensuit nécessairement : $u_n \geq 0$.
Sinon, si le contraire, à savoir $u_n < 0$, était vrai, puisque $\sqrt{n} \geq 0$, nous aurions $\sqrt{n}\,u_n \leq 0$, ce qui n'est pas.
Mini-raisonnement par l'absurde, dont l'absurdité arrive tellement vite que je ne me suis pas senti le besoin de l'annoncer...
Pourquoi n'avoir pas tout simplement divisé par $\sqrt{n}$ *? Pour éviter de parler du cas* $n = 0$ *(dont nous aurions certes pu expliquer qu'il est impossible, vu l'inégalité dont nous partons :* $0 < \sqrt{n}\,u_n$ *)*
Nous avons bien établi l'existence d'un entier naturel N tel que : $\forall n \geq N,\ u_n \geq 0$
(u_n) est donc bien positive à partir d'un certain rang.

Remarquez que nous aurions aussi pu prendre, par exemple, $\epsilon = \dfrac{l}{3}$ *(auquel cas, à partir d'un certain rang,* $l - \dfrac{l}{3} < \sqrt{n}\,u_n$*, c-à-d* $0 < \dfrac{2l}{3} < \sqrt{n}\,u_n$*, et nous pouvons aboutir à la même conclusion). En fait, n'importe quel* ϵ *strictement compris entre* 0 *et* l *convient...*

Exercice 6

Voyez ces équations de tous côtés surgir !
D'un sigma du crayon, je vous somme d'agir...

Énoncé : (temps conseillé : 50 min) (***) *d'après EM Lyon 2019 ECS*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite positive et décroissante. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k$$

1) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2) Justifier que (u_n) est convergente.
3) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $(n+2)v_{n+1} = nv_n + u_{n+1}$, puis $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n}\left(u_{n+1} - 2v_{n+1}\right)$
4) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $v_n \geq \frac{u_n}{2}$
5) Démontrer que (v_n) est convergente.

Remarques sur l'énoncé :

Rappelons au cas où que $\mathbb{N}^*$ est tout simplement l'ensemble des entiers naturels non nuls, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels plus grands ou égaux à 1. (De même que $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels non nuls)

Rappelons ensuite que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} a_k$ se lit « somme pour k allant de 1 à n des a_k », et désigne donc tout simplement $a_1 + a_2 + ... + a_n$.
La suite (v_n) introduite par l'énoncé est donc définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n(n+1)}\left(1 \times u_1 + 2 \times u_2 + ... + n u_n\right)$
Quant à la somme introduite dans la question 1), il s'agit tout simplement de la somme des entiers de 1 jusqu'à n. Autrement dit : $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n$

À toutes fins utiles, entre autres propriétés intuitives des sommes : lorsque C est une constante (indépendante de k), on a : $\sum_{k=1}^{n} C a_k = C \sum_{k=1}^{n} a_k$ (linéarité)
C'est une simple factorisation : trivialement, $Ca_1 + Ca_2 + ... + Ca_n = C(a_1 + a_2 + ... + a_n)$

Si vous ne l'avez pas manipulé en Terminale, voici un lien vers une playlist de vidéos courtes pour vous familiariser avec le signe $\sum$

Correction de l'exercice 6 :

1) *Peut-être certains d'entre vous ont-ils vu cette formule en Terminale. D'autres non... Mais comment la démontrer ? Comment faire le lien entre la somme des entiers de* 1 *à* n *et ce à quoi on voudrait nous faire aboutir, à savoir* $\dfrac{n(n+1)}{2}$ *?*
Ceux qui se souviennent de la formule donnant la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique $\left(\text{nombre de termes dans la somme} \times \dfrac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}\right)$ *peuvent s'en servir : notre somme des entiers de* 1 *jusqu'à* n *contient* n *termes, dont le premier est* 1 *et le dernier* n*. On obtient bien* $\sum_{k=1}^{n} k = n \times \dfrac{1+n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$*. Sinon, une petite récurrence :*

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Initialisation : pour $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} k = 1$ et $\dfrac{1(1+1)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ donc $\sum_{k=1}^{1} k = \dfrac{1(1+1)}{2}$

Hérédité : Supposons que pour un certain entier naturel non nul n, $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$, et montrons : $\sum_{k=1}^{n+1} k = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Comment faire le lien entre la somme dont nous connaissons l'expression $\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)$ *et celle que l'on cherche à déterminer* $\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)$ *?*

On a : $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k \quad + \quad (n+1)$ *La somme des entiers de* 1 *à* $n+1$ *est simplement la somme des entiers de* 1 *à* n *à laquelle on ajoute* $n+1$

Donc, par hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^{n+1} k = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1)$. *Maintenant, factorisons...*
D'où : $\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1)\left(\dfrac{n}{2}+1\right) = (n+1)\left(\dfrac{n+2}{2}\right)$. Finalement, on a bien : $\sum_{k=1}^{n+1} k = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure :

pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2) *Que sait-on sur la suite* (u_n) *? Peu de choses, mais c'est largement suffisant.*
(u_n) est décroissante et positive, c'est-à-dire minorée par 0.

Il est bon de garder en tête cette reformulation évidente de « suite positive » : « suite minorée par 0 ». De même, une suite négative est une suite majorée par 0.

Donc d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

Pas de panique si vous n'avez pas donné de nom à ce théorème en Terminale... Mais avec ou sans nom, vous devez l'avoir vu.

3) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k u_k$. Donc $(n+2)v_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k u_k$

Comment faire apparaître v_n dans cette expression (puisqu'il nous faut du v_n dans l'expression finale, et même, plus précisément, du nv_n) ?

D'autre part, $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k$ donc $nv_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k$

Ca ressemble à ce qu'on a obtenu avec $(n+2)v_{n+1}$, non ? Oui, ça y ressemble, à une différence près : la somme s'arrête à n au lieu de $n+1$...

Reprenons : $(n+2)v_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k u_k = \dfrac{1}{n+1}\Big(\sum_{k=1}^{n} k u_k \quad + (n+1)u_{n+1}\Big)$

Donc $(n+2)v_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k \quad + \dfrac{1}{n+1} \times (n+1)u_{n+1} = nv_n + u_{n+1}$

Nous avons bien montré : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+2)v_{n+1} = nv_n + u_{n+1}$

À partir de cette égalité, ça va être du gâteau de faire apparaître du $v_{n+1} - v_n$ ...

Donc, pour tout entier naturel n non nul : $nv_{n+1} + 2v_{n+1} = nv_n + u_{n+1}$
Par suite : $nv_{n+1} - nv_n = u_{n+1} - 2v_{n+1}$. Autrement dit : $n(v_{n+1} - v_n) = u_{n+1} - 2v_{n+1}$

Finalement : pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n}\big(u_{n+1} - 2v_{n+1}\big)$

4) *Un coup d'oeil de sécurité aux égalités montrées en 3), mais on ne voit pas a priori comment elles pouraient nous aider pour arriver à l'inégalité demandée... Pas de panique : si l'énoncé est bien fait, peut-être que la 3) servira à la 5). Et s'il est mal fait, peut-être qu'elle ne servira pas du tout. Revenons donc à la définition de v_n.*

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k$.

La suite (u_n) étant décroissante, on a, pour tout entier k entre 1 et n : $u_k \geq u_n$
Par décroissance de (u_n)*, parmi les termes* $u_1, u_2, \ldots, u_n$*, le plus petit terme est* u_n

Donc (en multipliant l'inégalité précédente par k positif) : $k u_k \geq k u_n$
Cela étant valable pour tout entier k compris entre 1 et n, on peut sommer, et on obtient :
$\dfrac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k \geq \dfrac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_n$. *D'accord, mais que faire de la somme de droite ?*

Dans la somme $\sum_{k=1}^{n} k u_n$, u_n est constant (indépendant de k). Donc $\sum_{k=1}^{n} k u_n = u_n \sum_{k=1}^{n} k$

Oh mais $\sum_{k=1}^{n} k$*, on connaît !*. D'après 1), on a donc : $\sum_{k=1}^{n} k u_n = u_n \times \dfrac{n(n+1)}{2}$

L'inégalité précédente s'écrit alors : $\dfrac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k \geq \dfrac{1}{n(n+1)} \times u_n \times \dfrac{n(n+1)}{2}$

D'où : $\dfrac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k \geq \dfrac{u_n}{2}$

Nous avons bien montré que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $v_n \geq \dfrac{u_n}{2}$

5) *Que savons-nous sur* (v_n) *qui serait susceptible de nous aider ?*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par somme et produit de termes positifs (la suite (u_n) étant positive), v_n est positif. La suite (v_n) est donc positive.
Et alors ? Et alors, si en plus on pouvait connaître ses variations...

(v_n) est donc minorée par 0. Et, d'après 3), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n}\left(u_{n+1} - 2v_{n+1}\right)$

On aimerait connaître le signe de cette quantité. Un coup d'oeil au résultat de la 4...

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n \geq \dfrac{u_n}{2}$. On a donc aussi, puisque l'inégalité est valable pour tout entier naturel non nul : $v_{n+1} \geq \dfrac{u_{n+1}}{2}$. Donc $2v_{n+1} \geq u_{n+1}$.
Autrement dit : $u_{n+1} - 2v_{n+1} \leq 0$. Par ailleurs, $\dfrac{1}{n} > 0$.
On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n \leq 0$. La suite (v_n) est donc décroissante.
Le théorème de convergence monotone nous permet de conclure que (v_n) est convergente.

Exercice 7

Pour qu'à l'hérédité le polynôme accède,
donnez-lui le degré des deux qui le précèdent.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min) (***) *d'après EM Lyon 2005 ECS*

Commençons par présenter le principe de raisonnement par récurrence double, que l'on pourra être amené à utiliser. Pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n est vraie, la récurrence simple se faisait ainsi :
Initialisation : On montre que P_0 est vraie.
Hérédité : On montre que si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.
Conclusion : Cela nous permet de conclure que pour tout entier naturel n, P_n est vraie.

Le principe de raisonnement par récurrence double est légèrement différent :
Initialisation : On montre que P_0 et P_1 sont vraies.
Hérédité : On montre que si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, P_n et P_{n+1} sont vraies, alors P_{n+2} aussi est vraie.
Conclusion : Cela nous permet de conclure que pour tout entier naturel n, P_n est vraie.

On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels définie par :
$T_0 = 1, T_1 = 2X$ et, pour tout entier naturel n, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$
On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour tout réel x :
$T_0(x) = 1, T_1(x) = 2x$ et, pour tout entier naturel n, $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$

1) Calculer T_2 et T_3.

2) Démontrer que, pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme de degré n, dont on déterminera le coefficient du terme de degré n.

Remarques sur l'énoncé :

Confondre polynôme et fonction polynomiale (l'énoncé nous y autorise), c'est se permettre de confondre, par exemple, le polynôme $X^2 + 2X - 8$ et la fonction polynomiale qui à tout réel x associe $x^2 + 2x - 8$. Cela peut être commode lorsque l'on veut éviter de se coltiner constamment « $\forall x \in \mathbb{R}$ » (ou « pour tout réel x »). Attention : lorsqu'on écrit $T_0 = 1$, n'oubliez pas que T_0 n'est pas un réel, mais bien le polynôme constant égal à 1 (que l'on confond commodément avec la fonction polynomiale constante égale à 1).

Correction de l'exercice 7 :

1) En appliquant la relation de récurrence donnée par l'énoncé ($T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$), et valable pour tout entier naturel n, à l'entier naturel $n = 0$, on obtient : $T_2 = 2XT_1 - T_0$
Et on sait : $T_0 = 1$ et $T_1 = 2X$. Donc $T_2 = 2X \times 2X - 1$. Finalement : $\boxed{T_2 = 4X^2 - 1}$
La fonction polynomiale associée est : $T_2 : x \mapsto 4x^2 - 1$

En appliquant la même relation à l'entier naturel $n = 1$, on obtient : $T_3 = 2XT_2 - T_1$
Donc $T_3 = 2X(4X^2 - 1) - 2X = 8X^3 - 2X - 2X$. Finalement : $\boxed{T_3 = 8X^3 - 4X}$
La fonction polynomiale associée est : $T_3 : x \mapsto 8x^3 - 4x$

2) *Petit rappel sur les degrés des polynômes par le biais d'exemples :*
$X^3 - 2X + 1$ *est de degré* 3, *et le coefficient du terme de degré* 3 *- ou coefficient dominant - est* 1 *(coefficient devant* X^3*).* $2X - 1$ *est de degré* 1, *et son coefficient dominant (coefficient devant* X*) est* 2. $3 + 5X^2$ *est de degré* 2, *et son coefficient dominant est* 5
Le polynôme 7 *est de degré* 0. *En fait, tout polynôme constant non nul est de degré* 0. *Et, par convention, le polynôme nul est de degré* $-\infty$.
Parenthèse sur cette dernière convention, qui peut sembler bizarre mais qui est bien commode, en fait : si deg(.) désigne le degré d'un polynôme, on veut que, pour tous polynômes P *et* Q, *l'égalité deg(PQ) = deg(P)+deg(Q) soit vérifiée.*
Dans le cas de deux polynômes non nuls, la puissance la plus grande obtenue par produit des deux polynômes correspond trivialement à la somme des plus grandes puissances pour chacun des deux polynômes :
Si $P = 3X^2 - 4X$ *et* $Q = X^3 - 2X^2 + 1$, *alors* $PQ = (3X^2 - 4X)(X^3 - 2X^2 + 1)$, *et le terme de plus haut degré de* PQ *est* $3X^2 \times X^3 = 3X^{2+3}$
Si le polynôme nul, que l'on notera P_0, *était de degré* 0, *on aurait eu, en prenant par exemple le polynôme* $Q = X$ *: d'une part,* $P_0Q = P_0$, *et donc deg(*P_0Q*) =* 0. *Et d'autre part, deg(*P_0*) + deg(*Q*) =* $0 + 1 = 1$, *donc l'égalité souhaitée* $\big(deg(P_0Q) = deg(P_0)+deg(Q)\big)$ *n'est pas vérifiée. Par contre, en posant deg(*P_0Q*) =* $-\infty$, *« *$-\infty + 1 = -\infty$ *» marche mieux...*
Fin de la parenthèse.

Récapitulons ce que nous savons grâce à 1) : T_0 *est de degré* 0, *et son coefficient dominant (coefficient du terme de plus haut degré) est* 1. T_1 *est de degré* 1, *et son coefficient dominant est* 2. T_2 *est de degré* 2, *et son coefficient dominant est* 4. T_3 *est de degré* 3, *et son coefficient dominant est* 8.

Au vu de ce qui précède, on peut faire une conjecture sur le coefficient dominant de T_n : ce serait 2^n. Mais il va falloir le démontrer, de même qu'il va falloir démontrer que T_n est de degré n. La suite de polynômes (T_n) étant définie par une relation de récurrence double (liant T_n, T_{n+1} et T_{n+2}), il semble judicieux, pour la preuve, d'utiliser le raisonnement de récurrence double introduit par l'énoncé.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n :
« T_n est de degré n et son coefficient dominant est 2^n »
Montrons par récurrence double que pour tout entier naturel n, P_n est vraie.

Initialisation : $T_0 = 1$, de degré 0 et de coefficient dominant $1 = 2^0$, donc P_0 est vraie.
$T_1 = 2X$, de degré 1 et de coefficient dominant $2 = 2^1$, donc P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, P_n et P_{n+1} sont vraies, et montrons que P_{n+2} aussi est vraie.
Supposons donc que T_n est de degré n, de coefficient dominant 2^n, et que T_{n+1} est de degré $n+1$, de coefficient dominant 2^{n+1}.
On sait aussi : $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. $2X$ est de degré 1 et T_{n+1} est de degré $n+1$. Donc $2XT_{n+1}$ est de degré $n+1+1 = n+2$. Et T_n est de degré n.

En faisant la somme - ou la différence - d'un premier polynôme de degré $n+2$ et d'un second polynôme de degré n, on obtient un polynôme de degré $n+2$, et le coefficient dominant de ce polynôme obtenu est celui du premier polynôme. En effet, le terme de plus haut degré (de degré $n+2$) du premier polynôme ne peut être simplifié avec un terme de degré égal dans le second polynôme (qui n'a pas de terme de degré strictement supérieur à n)

Donc T_{n+2} est de degré $n+2$, et son coefficient dominant est le même que celui de $2XT_{n+1}$. Le terme de plus haut degré de T_{n+1} est $2^{n+1}X^{n+1}$, donc le terme de plus haut degré de $2XT_{n+1}$ est $2X \times 2^{n+1}X^{n+1} = 2^{n+2}X^{n+2}$. Le coefficient dominant de T_{n+2} est donc 2^{n+2}

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence double nous permet de conclure que pour tout entier naturel n, P_n est vraie.
Autrement dit, pour tout entier naturel n, T_n est de degré n, et le coefficient du terme de degré n est 2^n.

Exercice 8

De deux qui se relayent, vers quoi tend le rapport ?
Sous un ardent soleil brille le nombre d'or.

Énoncé : (temps conseillé : 45 min) (***) *d'après Ecricome 2018 ECS*

Posons $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On considère la suite (u_n) définie par :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \left(-\dfrac{1}{\varphi}\right)^n\right)$

1) Montrer que les solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ sont φ et $-\dfrac{1}{\varphi}$

2) Montrer que, pour tout entier naturel n : $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$

3) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $u_n > 0$

4) Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite

5) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \dfrac{u_n}{u_{n+1}} - \dfrac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$

Remarques sur l'énoncé :

La suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 1}$ introduite dans la question 4), c'est tout simplement la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

Remarquez que pour tout entier naturel p, $(-1)^p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } p \text{ est impair pair} \end{cases}$

Pour ce qui est de la somme S_n introduite en 5), c'est tout simplement :

$$S_n = \frac{(-1)^1}{u_1 u_2} + \frac{(-1)^2}{u_2 u_3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}}$$

Enfin, si un petit rappel sur les sommes peut vous faire du bien, je vous renvoie aux remarques faites ici, et, une fois encore, à ces vidéos.

Correction de l'exercice 8 :

1) *Question simple, du moins au départ. On peut calculer* $\varphi^2-\varphi-1$ *et constater que ça fait effectivement* 0. *De même pour* $\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^2-\left(-\frac{1}{\varphi}\right)-1$. *Mais ici, résoudre l'équation du second degré me semble même plus facile sur le plan calculatoire.*
L'équation x^2-x-1 a pour discriminant $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-1)=5$.
$\Delta>0$, donc cette équation admet deux solutions réelles : $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$.
Reste à montrer que $\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-\frac{1}{\varphi}$*... Petite identité remarquable et au revoir les racines !*

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1^2-\sqrt{5}^2}{4}=\frac{1-5}{4}=-\frac{4}{4}=-1$. Autrement dit : $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\times\varphi=-1$

Donc : $\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-\frac{1}{\varphi}$. Les solutions de l'équation $x^2-x-1=0$ sont bien φ et $-\frac{1}{\varphi}$

On aurait aussi pu se servir des relations coefficients-racines. Rappel :
Soit $a\neq0$. *Si le trinôme du second degré* aX^2+bX+c *admet comme racines* x_1 *et* x_2, *alors* $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ *et* $x_1x_2=\frac{c}{a}$
Cela vient tout simplement du fait que le trinôme se factorise ainsi :
$aX^2+bX+c=a(X-x_1)(X-x_2)$.
Autrement dit, $aX^2+bX+c=a\left(X^2-(x_1+x_2)X+x_1x_2\right)=aX^2-a(x_1+x_2)X+ax_1x_2$
Par identification des coefficients des polynômes aX^2+bX+c *et* $aX^2-a(x_1+x_2)X+ax_1x_2$ *(qui sont égaux), on obtient :* $b=-a(x_1+x_2)$ *et* $c=ax_1x_2$.
Comme $a\neq0$, *cela donne bien :* $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ *et* $x_1x_2=\frac{c}{a}$

Revenons à notre exercice : en sachant que X^2-X-1 *a deux racines, dont l'une est* φ, *on peut utiliser les relations coefficients-racines. L'autre racine, que l'on peut noter* φ', *vérifie :* $\varphi\varphi'=\frac{-1}{1}=-1$. *D'où :* $\varphi'=-\frac{1}{\varphi}$

2) *La récurrence, ce n'est pas automatique. On ne voit pas trop comment on se débrouillerait à l'étape d'hérédité. Par ailleurs, ici, on peut effectuer le calcul directement, même s'il va falloir s'accrocher un petit peu...*
En utilisant l'expression de u_n donnée, on a, pour tout entier naturel n :
$u_nu_{n+2}-u_{n+1}^2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n-\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right)\times\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+2}-\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+2}\right)-\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1}-\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1}\right)\right]^2$

Tâchons d'y voir plus clair avec les puissances, histoire de ne pas nous emmêler les pinceaux sur le signe, et ne pas tomber dans des erreurs grossières du style $-\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^n$...

Donc $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \frac{(-1)^n}{\varphi^n}\right) \times \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+2} - \frac{(-1)^{n+2}}{\varphi^{n+2}}\right) - \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{\varphi^{n+1}}\right)\right]^2$

$= \frac{1}{5}\left(\varphi^{2n+2} - \frac{(-1)^{n+2}}{\varphi^2} - (-1)^n\varphi^2 + \frac{(-1)^{2n+2}}{\varphi^{2n+2}}\right) - \frac{1}{5}\left(\varphi^{2n+2} - 2\times(-1)^{n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{\varphi^{2n+2}}\right)$

Il s'ensuit *(après simplifications)* : $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = \frac{1}{5}\left(-\frac{(-1)^{n+2}}{\varphi^2} - (-1)^n\varphi^2 + 2\times(-1)^{n+1}\right)$

D'où : $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = \frac{1}{5}\left(\frac{(-1)^{n+3}}{\varphi^2} + (-1)^{n+1}\varphi^2 + 2\times(-1)^{n+1}\right)$

Remarquez que $(-1)^{n+3} = (-1)^{n+1}$. *Tout simplement parce que* $n+3$ *et* $n+1$ *ont la même parité (l'un est pair si et seulement si l'autre est pair). Ce qui se voit aussi en écrivant :* $(-1)^{n+3} = (-1)^{n+1}\times(-1)^2 = (-1)^{n+1}\times 1 = (-1)^{n+1}$

Donc : $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{5}\left(\frac{1}{\varphi^2} + \varphi^2 + 2\right)$

Là, on pourrait calculer explicitement φ^2 *et* $\frac{1}{\varphi^2}$. *De manière alternative, mettre au même dénominateur* (φ^2) *ferait apparaître du* φ^4 *au numérateur, ce qui peut faire peur. Sauf si l'on voit l'identité remarquable qui se dessine :*

$u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{5} \times \frac{1+\varphi^4+2\varphi^2}{\varphi^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{5} \times \frac{\left(\varphi^2+1\right)^2}{\varphi^2}$

Donc : $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{5} \times \left(\frac{\varphi^2+1}{\varphi}\right)^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{5} \times \left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right)^2$

Or, on sait (cf 1)) $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1}{\varphi} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Donc $\varphi + \frac{1}{\varphi} = \sqrt{5}$, ce qui donne : $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{5} \times (\sqrt{5})^2 = (-1)^{n+1}$

On a bien montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}}$

3) Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \left(-1\right)^n\frac{1}{\varphi^n}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\varphi^{2n} - (-1)^n}{\varphi^n}$, avec $\varphi > 0$. u_n est donc du signe de $\varphi^{2n} - (-1)^n$

Le $(-1)^n$ vous empêche d'y voir clair en termes de signe ? Pas vraiment. Mais si ça peut vous rassurer, distinguez les cas :
Si n est pair, $\varphi^{2n}-(-1)^n=\varphi^{2n}-1$. Or, par stricte croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$: $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}>\dfrac{1+\sqrt{1}}{2}=\dfrac{2}{2}=1$. Donc $\varphi>1$.
Et, par stricte croissance de la fonction $x\mapsto x^{2n}$ sur $\mathbb{R}_+$: $\varphi^{2n}>1^{2n}$. Autrement dit : $\varphi^{2n}>1$, c'est-à-dire : $\varphi^{2n}-1>0$

Pour rappel, pour tout entier naturel ***non nul*** *k, la fonction $x\mapsto x^k$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Mieux encore : si, de plus, k est impair, $x\mapsto x^k$ est même strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Cela se retrouve facilement en étudiant le signe de la dérivée $x\mapsto kx^{k-1}$*

Si n est impair, $\varphi^{2n}-(-1)^n=\varphi^{2n}-(-1)=\varphi^{2n}+1>0$

On a montré : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \varphi^{2n}-(-1)^n>0$, et finalement : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>0}$

La distinction n pair / n impair pouvait être évitée, en écrivant notamment :
$\varphi^{2n}-(-1)^n\geq\varphi^{2n}-1$ *(*$(-1)^n$ *étant égal soit à 1, soit à -1, dans tous les cas :* $(-1)^n\geq-1$*)*

4) D'après 3), on a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>0$. En particulier, $u_n\neq0$

La suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq1}$ est donc bien définie. Posons, pour tout $n\geq1$, $v_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

Introduire le nom v_n n'est pas nécessaire, je le fais par commodité.
En 3), nous avions donné une expression « condensée » de u_n (mise sous le même dénominateur), dont l'utilisation semble plus pertinente pour exprimer efficacement $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

Pour tout entier naturel n non nul : $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\varphi^{2n}-(-1)^n}{\varphi^n}$ (cf calcul en 3)
Et donc $u_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\varphi^{2(n+1)}-(-1)^{n+1}}{\varphi^{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\varphi^{2n+2}-(-1)^{n+1}}{\varphi^{n+1}}$
D'où : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\varphi^{2n+2}-(-1)^{n+1}}{\varphi^{n+1}}\times\sqrt{5}\times\dfrac{\varphi^n}{\varphi^{2n}-(-1)^n}$

Diviser par u_n, c'est tout simplement multiplier par son inverse... Pas besoin ici de s'encombrer avec des expressions horribles du genre : $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{\varphi^{2n+2}-(-1)^{n+1}}{\varphi^{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{\varphi^{2n}-(-1)^n}{\varphi^n}}$

Donc *(après simplifications)* : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{1}{\varphi} \times \dfrac{\varphi^{2n+2} - (-1)^{n+1}}{\varphi^{2n} - (-1)^n}$

Et maintenant, la limite... Un calcul direct ($\varphi > 1$) donne une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Factorisons donc, au numérateur et au dénominateur, par les termes prépondérants.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{1}{\varphi} \times \dfrac{\varphi^{2n+2}\left(1 - \dfrac{(-1)^{n+1}}{\varphi^{2n+2}}\right)}{\varphi^{2n}\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{\varphi^{2n}}\right)} = \varphi \times \dfrac{1 - \dfrac{(-1)^{n+1}}{\varphi^{2n+2}}}{1 - \dfrac{(-1)^n}{\varphi^{2n}}} = \varphi \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{-1}{\varphi^2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\dfrac{-1}{\varphi^2}\right)^n}$

On a fait apparaître des termes généraux de suites géométriques... $\left(\dfrac{-1}{\varphi^2}\right)^{n+1}$ *et* $\left(\dfrac{-1}{\varphi^2}\right)^n$

On a déjà montré (en 3) $\varphi > 1$. Donc (par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$) : $\varphi^2 > 1$. D'où : $\dfrac{1}{\varphi^2} < 1$. Et, trivialement : $0 < \dfrac{1}{\varphi^2}$. Donc : $0 < \dfrac{1}{\varphi^2} < 1$

Et donc (en multipliant par $-1 < 0$) : $-1 < -\dfrac{1}{\varphi^2} < 0$. Donc : $-\dfrac{1}{\varphi^2} \in\ ]-1;1[$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-1}{\varphi^2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-1}{\varphi^2}\right)^{n+1} = 0$

Enfin, par somme et quotient de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \varphi \times \dfrac{1-0}{1-0}$

Finalement, la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers φ.

Quand on vous demande de montrer qu'une suite converge et de déterminer sa limite, ça ne veut pas forcément dire en deux étapes distinctes. On peut faire d'une pierre deux coups par un calcul direct lorsqu'on a l'expression de la suite comme c'est le cas ici.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$

C'est quasiment la même somme ! Sauf que la première a un terme en plus par rapport à la seconde (le terme correspondant à $k = n+1$)

Donc $S_{n+1} - S_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n u_{n+1}}$ *Ce* $(-1)^{n+1}$ *me dit quelque chose...*

D'après 2) : $(-1)^{n+1} = u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2$ (c'était valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). Donc $S_{n+1} - S_n = \dfrac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_n u_{n+1}} = \dfrac{u_n u_{n+2}}{u_n u_{n+1}} - \dfrac{u_{n+1}^2}{u_n u_{n+1}} = \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

On a bien montré : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+1} - S_n = \dfrac{u_n}{u_{n+1}} - \dfrac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$

Exercice 9

Visions de l'an dernier, affres différentielles !
Cet exo saisonnier calmement les rappelle.

Énoncé : (temps conseillé : 10 min) (*) *d'après HEC 2015 ECS*

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et x une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, vérifiant : $\forall t \geq 0,\ x'(t) = ax(t) + b$

1) Calculer la dérivée de la fonction $y : t \mapsto \left(x(t) + \dfrac{b}{a}\right)e^{-at}$

2) En déduire que pour tout $t \geq 0$, on a : $x(t) = -\dfrac{b}{a} + \left(x(0) + \dfrac{b}{a}\right)e^{at}$

Remarques sur l'énoncé :

Profitons-en pour rappeler (ou faire découvrir) le sens de la notation $E \times F$, lorsque E et F sont deux ensembles.
Nous avions déjà vu ici que si E est un ensemble, E^2 est l'ensemble des couples (a,b) avec $a \in E$ et $b \in E$. On note aussi $E^2 = E \times E$.
Plus généralement, $E \times F$, appelé produit cartésien de E et F, est l'ensemble des couples (a,b) avec $a \in E$ et $b \in F$.
« Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ » veut donc dire la même chose que « Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ »
(Autrement dit, soit a un réel non nul et soit b un réel)

Par ailleurs, en termes de noms de lettres, il faut s'adapter à la situation. Vous avez peut-être plus l'habitude de voir x en tant que variable de fonction... Et bien ici, non. x est une fonction, et on prend t comme variable. Gardez en tête q'une lettre ne vaut que par ce qu'elle représente. Plus de détails dans cet article.

Correction de l'exercice 9 :

1) *L'énoncé ne précise pas l'ensemble de définition de y. Qu'à cela ne tienne : elle est définie sur $\mathbb{R}_+$ puisque x est définie sur $\mathbb{R}_+$.*

y est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par somme, composée et produit de fonctions dérivables.
Pour tout $t \geq 0$, $y'(t) = x'(t) \times e^{-at} + \left(x(t) + \dfrac{b}{a}\right) \times (-ae^{-at})$

On a utilisé la formule de dérivation d'un produit, et c'est la formule de la dérivation d'une composée nous a permis de trouver $t \mapsto -ae^{-at}$ comme dérivée de $t \mapsto e^{-at}$

Factorisons par e^{-at} pour y voir plus clair :

Donc, pour tout $t \geq 0$, $y'(t) = e^{-at}\left(x'(t) + \left(x(t) + \dfrac{b}{a}\right) \times \left(-a\right)\right) = e^{-at}\left(x'(t) - ax(t) - b\right)$
Or, par hypothèse, $x'(t) = ax(t) + b$.
Donc, pour tout $t \geq 0$, $y'(t) = 0$.

La dérivée de y sur $\mathbb{R}_+$ est donc la fonction nulle.

2) *Attention, certains pourraient être tentés de donner directement une expression de $x(t)$ ici, grâce au cours sur les équations différentielles. Ce serait ne pas jouer le jeu... « En déduire ». Prenez-le, si vous le voulez, comme une démonstration de cours, mais en tous cas, utilisez le résultat de la 1).*

La dérivée de la fonction y est nulle sur **l'intervalle** $\mathbb{R}_+$ (c'est-à-dire $[0;+\infty[$).
Nous pouvons en déduire que la fonction y est constante sur $\mathbb{R}_+$.

La mention « intervalle » était importante. En effet, dans le cas général, une fonction peut avoir une dérivée nulle sur un ensemble sans pour autant être constante sur cet ensemble ! Pour peu que cet ensemble soit « troué »... Tenez, par exemple : la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ t > 0 \\ -1 & si\ t < 0 \end{cases}$ f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 0$
Pourtant, f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$. (Mais elle est bien constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, qui sont des intervalles).

Dans le même ordre d'idée, la fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et sa dérivée est la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$, strictement négative sur $\mathbb{R}^*$. Mais la fonction inverse n'est clairement pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$. Elle est (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et sur $\mathbb{R}_-^*$

La fonction y étant constante sur $\mathbb{R}_+$, on a, en particulier : $\forall t \geq 0,\ y(t) = y(0)$

La valeur en 0 nous intéresse vu le résultat demandé.

Autrement dit (en utilisant l'expression de y) : $\forall t \geq 0,\ \left(x(t) + \dfrac{b}{a}\right)e^{-at} = \left(x(0) + \dfrac{b}{a}\right)e^{-a\times 0}$

On a donc : $\forall t \geq 0,\ \left(x(t) + \dfrac{b}{a}\right)e^{-at} = x(0) + \dfrac{b}{a}$. D'où : $\forall t \geq 0,\ x(t) + \dfrac{b}{a} = \left(x(0) + \dfrac{b}{a}\right)e^{at}$

Nous avons finalement : $\boxed{\forall t \geq 0,\ x(t) = -\dfrac{b}{a} + \left(x(0) + \dfrac{b}{a}\right)e^{at}}$

Exercice 10

Ces expressions sont comme des amis fâchés :
fournis ton maximum pour les rabibocher.

Énoncé : (temps conseillé : 30 min) (****) *d'après EDHEC 2014 ECS*

1) Soit x un réel fixé. Justifier que la fonction $f : t \mapsto \max(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout réel x, on considère l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \max(x,t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que :

$$I(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

3) Justifier que la fonction I est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Remarques sur l'énoncé :

Pour tous réels a et b, $\max(a,b)$ est le plus grand des deux réels a et b.

Dans la question 2), l'intégrale est appelée $I(x)$. Mettons-nous bien d'accord : elle ne dépend que de x, et certainement pas de t. t n'est qu'une variable muette d'intégration. Autrement dit, on peut remplacer t par une autre lettre*, ça ne changera rien à $I(x)$:
$I(x) = \displaystyle\int_0^1 \max(x,u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \max(x,z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \max(x,s)\,\mathrm{d}s = \ldots$ * sauf x, bien entendu...

Pour la question 3), attention à ce qui se passe aux « frontières » ...

Correction de l'exercice 10 :

1) f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} x & \text{si } t \leq x \\ t & \text{si } t > x \end{cases}$

On aurait aussi pu écrire, ce qui revient au même : f est définie sur $\mathbb{R}$ par
$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} x & si\ t < x \\ t & si\ t \geq x \end{cases}$ *(dans le cas $t = x$, les expressions des deux lignes coïncident)*

f est constante sur $]-\infty;x]$ et affine (même linéaire) sur $[x;+\infty[$.
f est donc trivialement continue sur $]-\infty;x[$ et sur $]x;+\infty[$

Attention : dire que f est constante sur $]-\infty;x]$ (oui, même avec x compris dedans, j'ai bien vu) ne garantit pas la continuité en x. En effet, cela ne nous dit rien sur ce qu'il se passe à droite de x...

D'une part, $\lim\limits_{t\to x^-} f(t) = \lim\limits_{t\to x^-} x = x = f(t)$ et d'autre part : $\lim\limits_{t\to x^+} f(t) = \lim\limits_{t\to x^+} t = x$
On a donc : $\lim\limits_{t\to x} f(t) = f(x)$, ce qui prouve la continuité de f en x.
Nous pouvons enfin en conclure que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout réel x, $I(x) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$

L'énoncé a la gentillesse de nous préciser les cas à distinguer pour les valeurs de x...

Si $x \leq 0$: pour tout $t \in [0;1], t \geq x$, donc $f(t) = t$. Donc dans ce cas, $I(x) = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1$
D'où : $I(x) = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$

Si $x \geq 1$: pour tout $t \in [0;1], t \leq x$, donc $f(t) = x$. Donc dans ce cas, $I(x) = \int_0^1 x\,\mathrm{d}t = \left[xt\right]_0^1$
D'où : $I(x) = x \times 1 - x \times 0 = x$
Attention, dans l'intégrale $\int_0^1 x\,dt$, x est une constante. La variable d'intégration est t...
Et c'est donc bien t que l'on remplace par 1 et par 0 dans les crochets.

Si $0 < x < 1$: *Là, il va falloir faire un découpage en fonction des valeurs prises par t dans l'intervalle $[0;1]$...*
La relation de Chasles fournit : $I(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$

Pour tout $t \in [0;x]$, $t \leq x$ donc $f(t) = x$. Et pour tout $t \in [x;1]$, $t \geq x$ donc $f(t) = t$

On en déduit : $I(x) = \displaystyle\int_0^x x\,\mathrm{d}t + \int_x^1 t\,\mathrm{d}t = \left[xt\right]_0^x + \left[\frac{t^2}{2}\right]_x^1 = x \times x - x \times 0 + \frac{1^2}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$

Nous avons bien montré que $I(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

3) I est constante sur $]-\infty;0]$, polynomiale sur $]0;1[$ et affine sur $[1;+\infty[$

Donc I est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0;1\}$

$\mathbb{R}\backslash\{0;1\}$ *se lit « $\mathbb{R}$ privé de 0 et de 1 ». Dire qu'une fonction est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0;1\}$, c'est dire qu'elle est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ qui n'est ni 0 ni 1. Mais ça ne dit pas si elle est dérivable (ou pas) en 0 et en 1. Ça ne l'interdit pas !*

Mais pourquoi, dans notre cas précis, ne pouvons-nous pas dire tout de suite que I est dérivable en 0 par exemple ? Pourtant, l'expression de I à gauche de 0 et celle à droite de 0 sont toutes les deux dérivables ! Ce n'est pas tout... Rappelons que I est dérivable en zéro si et seulement si le taux d'accroissement $\dfrac{I(x)-I(0)}{x-0}$ admet une limite finie en zéro. Ici, du fait des deux expressions différentes, il faut s'assurer que les limites de ce taux d'accroissement à droite et à gauche en zéro sont égales !

D'une part, pour tout $x < 0$, $\dfrac{I(x)-I(0)}{x-0} = \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x-0} = 0$. Donc : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{I(x)-I(0)}{x-0} = 0$

On ne peut pas encore dire que I est dérivable en 0, mais on peut dire (si l'on veut) que I est dérivable à gauche en 0, et que sa dérivée à gauche en 0 est 0. On peut noter : $I'_g(0) = 0$. Reste à montrer que I est dérivable à droite en 0, et que sa dérivée à droite en 0 est aussi 0 (dérivée que l'on pourra noter $I'_d(0)$).

D'autre part, pour tout $x \in]0;1[$, $\dfrac{I(x)-I(0)}{x-0} = \dfrac{\frac{x^2+1}{2}-\frac{1}{2}}{x} = \dfrac{x^2}{x} = x$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{I(x)-I(0)}{x-0} = 0$

On a montré : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{I(x)-I(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{I(x)-I(0)}{x-0} = 0$

Les limites du taux d'accroissement à gauche en zéro et à droite en zéro existent et sont égales, d'où l'existence de la limite du taux d'accroissement en zéro.

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{I(x)-I(0)}{x-0}=0$. Cela prouve que I est dérivable en 0 (et que $I'(0)=0$)

Intéressons-nous enfin à la dérivabilité de I en 1. D'une part, pour tout $x\in\left]0;1\right[$:

$$\frac{I(x)-I(1)}{x-1}=\frac{\frac{x^2+1}{2}-1}{x-1}=\frac{\frac{x^2+1-2}{2}}{x-1}=\frac{x^2-1}{2(x-1)}=\frac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)}=\frac{x+1}{2}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{I(x)-I(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1$ *(autrement dit, $I'_g(1)=1$)*

D'autre part, pour tout $x>1$, $\dfrac{I(x)-I(1)}{x-1}=\dfrac{x-1}{x-1}=1$, donc $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{I(x)-I(1)}{x-1}=1$

On a montré : $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{I(x)-I(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{I(x)-I(1)}{x-1}=1$

Donc $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{I(x)-I(1)}{x-1}=1$. Cela prouve que I est dérivable en 1 (et que $I'(1)=1$).

Nous avons montré que I était dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0;1\}$, en 0, et en 1. Nous pouvons donc enfin conclure que I est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Au lieu d'obtenir les limites de taux d'accroissement par le calcul (certes simple ici), on aurait pu utiliser, par exemple pour la dérivabilité en 1, la dérivabilité des fonctions $f:x\mapsto\dfrac{x^2+1}{2}$ et $g:x\mapsto x$ comme suit : (connaissant $f':x\mapsto x$ et $g':x\mapsto 1$

D'une part, pour tout $x\in\left]0;1\right[$, $\dfrac{I(x)-I(1)}{x-1}=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ (on a bien vérifié $I(1)=f(1)$)

f étant dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc en particulier en 1), on a : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$

En particulier : $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$. Donc $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{I(x)-I(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$

De même, g' étant dérivable en 1, on a : $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{I(x)-I(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=1$

On a montré : $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{I(x)-I(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{I(x)-I(1)}{x-1}=1$, ce qui prouve : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{I(x)-I(1)}{x-1}=1$

I est bien dérivable en 1 (et $I'(1)=1$)

Exercice 11

Elève à l'oeil profane, admire ici la clique
de sinus cos et tan, version hyperbolique.

Énoncé : (temps conseillé : 30 min) (***) *d'après EDHEC 2022 ECS*

1) Soit f une fonction définie et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 1$
Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\big(f(x)\big)}{\ln(x)} = 1$

Soient les fonctions sh et ch (respectivement sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique) définies sur $\mathbb{R}$ par $\text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

2) Etudier les parités de sh et ch, et dresser leurs tableaux de variations complets.

3) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$

4) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sh}(x)}{x} = 1$

5) Soit la fonction th définie sur $\mathbb{R}$ par $\text{th}(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$. Justifier que th est bien définie sur $\mathbb{R}$, et étudier sa parité puis ses variations.

6) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{\text{sh}(x)} = \dfrac{ae^{-x}}{1-e^{-x}} + \dfrac{be^{-x}}{1+e^{-x}}$

7) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{\text{sh}(x)}$

8) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\big(\text{th}(\frac{x}{2})\big)}{\ln(x)} = 1$

Remarques sur l'énoncé :

sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique ? À ceux qui ont fait maths expertes (et les complexes en particulier), les expressions de sh et ch devraient évoquer les formules d'Euler...

Lorsque deux fonctions f et g sont telles que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (et si on a la garantie que g ne s'annule pas au voisinage de a - c'est-à-dire si l'on s'approche suffisamment de a - pour que la limite du quotient ait un sens), alors on note : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. On dit que f et g sont équivalentes en a. Ce symbole $\sim$ étant très présent dans le sujet originel, je l'ai remplacé par les limites de quotient correspondantes pour qu'un élève au sortir de la Terminale ne s'en trouve pas désarçonné.

Correction de l'exercice 11 :

1) *Ce genre de question qui pousse à l'erreur... Attention à ne pas diffamer* ln *en lui inventant des propriétés sous prétexte que l'on serait coincé... Une expression de la forme* $\frac{\ln(a)}{\ln(b)}$ *ne nous permettant pas d'appliquer directement une propriété calculatoire de* ln*, créons les bonnes conditions pour pouvoir le faire :*

Pour tout réel $x>0$, $\dfrac{\ln\big(f(x)\big)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln\big(\frac{f(x)}{x}\times x\big)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln\big(\frac{f(x)}{x}\big)+\ln(x)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln\big(\frac{f(x)}{x}\big)}{\ln(x)} + 1.$

Or : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, donc par continuité de ln sur $\mathbb{R}_+^*$: $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\big(\frac{f(x)}{x}\big) = \ln(1) = 0$

Puis, par quotient et somme de limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\big(\frac{f(x)}{x}\big)}{\ln(x)} + 1 = 1$

Non, « $\frac{0}{+\infty}$ *» n'est pas une forme indéterminée...*

Nous avons bien montré : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\big(f(x)\big)}{\ln(x)} = 1}$

2) sh et ch sont bien définies sur un ensemble symétrique par rapport à 0, en l'occurrence $\mathbb{R}$. *La moindre des choses pour pouvoir parler de fonction* f *paire ou impaire, c'est que son domaine de définition* D_f *vérifie :* $\forall x\in D_f,\ -x\in D_f$*. Même s'il est peu utile de le rappeler au correcteur dans le cas évident de* $\mathbb{R}$*, il est bon de vérifier cette propriété de symétrie dans le cas d'un domaine plus compliqué...*

Pour tout réel x, $\mathrm{sh}(-x) = \dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} = -\mathrm{sh}(x)$. sh est donc impaire.

Pour tout réel x, $\mathrm{ch}(-x) = \dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$. ch est donc paire.

sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ par composée et somme de telles fonctions.
Par pitié, ne me dérivez pas ça comme un quotient... $\frac{f}{2}$*, c'est la même chose que* $\frac{1}{2}f$
$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{sh}'(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} > 0$ (par stricte positivité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$)
sh est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Remarquons au passage que $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.
Par ailleurs, un calcul simple de limite donne : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$ (« $+\infty - 0$ »)
Puis, par imparité de sh (ou par un autre calcul simple) : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$ On obtient donc le tableau de variations suivant pour sh :

x	$-\infty$	$+\infty$
sh	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, qui est du signe de $e^x - e^{-x}$. Or :
$e^x - e^{-x} \geq 0 \iff e^x \geq e^{-x} \iff x \geq -x$ par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ (ou d'exp sur $\mathbb{R}$)
$\iff 2x \geq 0 \iff x \geq 0$
Une proportion étonnante d'élèves bloquent à l'étape $x \geq -x$, ou font des bêtises, du genre diviser des deux côtés par x (dont on ne connaît ni le signe, ni la non-nullité)... Veillez à ne pas en être !
On obtient le tableau de signe suivant pour ch′ (remarque : ch′ = sh...) ainsi que le tableau de variations de ch :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ ont été obtenues par calcul simple de limite (avec possibilité d'utiliser la parité de ch, qui entraîne l'égalité de ses limites en $+\infty$ et $-\infty$, pour ne faire qu'un calcul de limite). Et $\text{ch}(0) = \dfrac{e^0 + e^0}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

3) Pour tout réel x : $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = \big(\text{ch}(x) + \text{sh}(x)\big)\big(\text{ch}(x) - \text{sh}(x)\big)$. D'où :
$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = \Big(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\Big)\Big(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\Big) = \dfrac{2e^x}{2} \times \dfrac{2e^{-x}}{2} = e^x \times e^{-x} = 1$
Nous avons bien montré : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1}$

4) *C'est le genre de question qui désavantage grandement tous ceux qui détestent les limites de taux d'accroissement...*
Comment sortir de cette forme indéterminée ? Si l'on a assez d'imagination pour voir $\text{sh}(x) - \text{sh}(0)$ *au numérateur, tant mieux :*

Pour tout réel x non nul, $\dfrac{\text{sh}(x)}{x} = \dfrac{\text{sh}(x) - \text{sh}(0)}{x - 0}$, qui est le taux d'accroissement de la

fonction sh entre 0 et x. Cette fonction étant dérivable sur $\mathbb{R}$ (de dérivée ch) et en particulier en 0. Nous pouvons donc en déduire : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sh}(x)}{x} = \text{sh}'(0) = \text{ch}(0)$

Autrement dit : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sh}(x)}{x} = 1}$

On pouvait aussi repasser par l'expression de sh*, pour écrire :*

$$\frac{\text{sh}(x)}{x} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - e^{-x}}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x}\right)$$

Mais là non plus, on n'échappe pas, au moins indirectement, aux limites de taux d'accroissement... En tous cas, il faut savoir : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. *Coissance comparée boudée par les élèves de Terminale, qui vient en fait de la limite du taux d'accroissement de la fonction exponentielle en* 0*... Cela entraîne aussi (par composée de limites) :* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x} - 1}{-x} = 1$. *Puis, par somme et produit de limites :* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sh}(x)}{x} = \dfrac{1}{2}(1 + 1) = 1$

5) sh et ch sont bien définies sur $\mathbb{R}$. De plus, d'après le tableau de variations obtenu en 3), on a, pour tout réel x, $\text{ch}(x) \geq 1 > 0$. Donc ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Nous pouvons en conclure que $\boxed{\text{la fonction th est bien définie sur } \mathbb{R}.}$
$\forall x \in \mathbb{R} : \text{th}(-x) = \dfrac{\text{sh}(-x)}{\text{ch}(-x)} = \dfrac{-\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$ par parité de ch et imparité de sh sur $\mathbb{R}$.
Donc, pour tout réel x, $\text{th}(-x) = -\text{th}(x)$. Autrement dit, $\boxed{\text{th est impaire.}}$
Par ailleurs, th est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de telles fonctions.
Pour tout réel x : $\text{th}'(x) = \dfrac{\text{sh}'(x)\text{ch}(x) - \text{sh}(x)\text{ch}'(x)}{\text{ch}^2(x)} = \dfrac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)}$ d'après 3)
D'où : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{th}'(x) > 0$, et $\boxed{\text{th est donc strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

On ne nous demande pas les limites à proprement parler, mais voici, tout de même, leur calcul. Commençons par la limite en $+\infty$ *, où l'on a une forme indéterminée :*
$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{th}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \times \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$
Avec cette dernière forme, par composée, somme et quotient de limites, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}(x) = 1$, *et enfin, l'imparité de* th *donne :* $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{th}(x) = -1$

6) Pour tout réel x non nul : $\dfrac{1}{\text{sh}(x)} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

Comment passer de cette forme à celle attendue par l'énoncé ? Il semble plus simple

de partir de la droite et mettre au même dénominateur. Ensuite ? Ensuite, on verra...

Pour tout réel x non nul, $1-e^{-x}\neq 0$ (la résolution d'une équation simple donne : $1-e^{-x}$ est nul si et seulement si $x=0$) et $1+e^{-x}>0$ donc non nul.

Pour tous réels a et b, pour tout réel x non nul : $\dfrac{ae^{-x}}{1-e^{-x}}+\dfrac{be^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{ae^{-x}(1+e^{-x})+be^{-x}(1-e^{-x})}{(1-e^{-x})(1+e^{-x})}$

$=\dfrac{ae^{-x}+a+be^{-x}-b}{1^2-(e^{-x})^2}=\dfrac{(a+b)e^{-x}+a-b}{1-e^{-2x}}$ *Mais je veux e^x-e^{-x} au dénominateur...*

$=\dfrac{e^x\left[(a+b)e^{-x}+a-b\right]}{e^x(1-e^{-2x})}=\dfrac{a+b+(a-b)e^x}{e^x-e^{-x}}$

D'où l'équivalence : $\left[\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{\text{sh}(x)}=\dfrac{ae^{-x}}{1-e^{-x}}+\dfrac{be^{-x}}{1+e^{-x}}\right]\iff\left[\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ a+b+(a-b)e^x=2\right]$

Pour que cela soit vrai, il suffit donc de prendre a et b tels que : $\begin{cases}a+b&=2\\a-b&=0\end{cases}$

Par combinaison (en remplaçant la première ligne par la somme des deux lignes) : $\begin{cases}2a&=2\\b&=a\end{cases}$, c'est-à-dire : $\begin{cases}a&=1\\b&=1\end{cases}$

Nous avons donc montré : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{\text{sh}(x)}=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}+\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}}$

*« Pour que cela soit vrai, il suffit... » Nous avons donc établi que $a=b=1$ était une condition **suffisante** pour que l'égalité voulue par l'énoncé (pour tout réel x non nul) soit réalisée (et, en soi, ça nous suffit pour répondre aussi, l'énoncé nous demandant juste de déterminer deux réels a et b qui conviennent, et pas **tous** les couples (a,b) qui conviendraient).*
*En fait, c'est aussi une condition **nécessaire**. En effet, si, pour tout réel x non nul, $a+b+(a-b)e^x=2$, nous avons, en particulier (pour $x=0$) : $a+b+a-b=2$ donc $2a=2$ d'où $a=1$. Et, par passage à la limite ($x\to-\infty$) dans l'égalité $a+b+(a-b)e^x=2$, on obtient $a+b=2$ d'où $b=2-1=1$...*
Un petit trou de mémoire sur les notions de condition nécessaire et suffisante ? Pas grave, revenez ici.

7) *Oh, quelle coïncidence ! On nous demande une primitive de fonction à l'air farouche, juste après nous avoir demandé de l'exprimer autrement, comme somme de deux fonctions plus simples à primitiver... Bien évidemment, hors de question de faire appel au fait (vrai) qu'une primitive de sh est ch, le passage à l'inverse changeant tout.*
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x)=\dfrac{1}{\text{sh}(x)}=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}+\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$, et soient les fonctions

u_1 et u_2 respectivement définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u_1(x) = 1 - e^{-x}$ et $u_2(x) = 1 + e^{-x}$.
u_1 et u_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout réel x non nul : $u_1'(x) = e^{-x}$ et $u_2'(x) = -e^{-x}$
Remarquons alors : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : g(x) = \dfrac{u_1'(x)}{u_1(x)} - \dfrac{u_2'(x)}{u_2(x)}$.
Avant de dégainer $\ln(u)$*, assurez-vous de la stricte positivité de votre* u*...*
$\forall x \in \mathbb{R}$: $1 - e^{-x} > 0 \iff e^{-x} < e^0 \iff -x < 0$ par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$
Autrement dit, $1 - e^{-x} > 0$ si et seulement si $x > 0$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ u_1(x) > 0$
D'autre part, par stricte positivité de exp : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ u_2(x) > 0$.
Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de g est donc G définie par $G(x) = \ln\big(u_1(x)\big) - \ln(u_2(x)) = \ln\big(\dfrac{u_1(x)}{u_2(x)}\big)$

Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{\text{sh}(x)}$ est donc $G : x \mapsto \ln\big(\dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}\big)$

8) *À quoi me fait penser cette question ? À la 1), bien évidemment. S'agit-il de prouver d'abord que* $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\text{th}(\frac{x}{2})}{x} = 1$ *? Peut-être... Commençons par rassembler les hypothèses de 1).*

th est bien définie et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ (car strictement croissante d'après 5, et $\text{th}(0) = 0$). *« Définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *? » Ben oui, puisqu'elle est définie sur* $\mathbb{R}$*...*

Pour tout $x > 0, \text{th}\big(\dfrac{x}{2}\big) = \dfrac{\text{sh}(\frac{x}{2})}{\text{ch}(\frac{x}{2})}$

On a montré en 4 : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sh}(x)}{x} = 1$. D'où (par composée de limites) : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sh}(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} = 1$
De plus, par continuité de ch (sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 0) : $\lim\limits_{x \to 0} \text{ch}(\frac{x}{2}) = \text{ch}(0) = 1$
Donc, par quotient de limites : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sh}(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2} \times \text{ch}(\frac{x}{2})} = 1$. Autrement dit : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{th}(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} = 1$

Ah ben zut alors ! On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{th}(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} = 1$ *et pas* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{th}(\frac{x}{2})}{x} = 1$.

Est-ce si grave ? Restons honnête et voyons à quoi l'utilisation de 1) nous mène...

D'après 1), nous obtenons donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln\big(\text{th}(\frac{x}{2})\big)}{\ln\big(\frac{x}{2}\big)} = 1$

Nous voulons arriver à : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln\big(\text{th}(\frac{x}{2})\big)}{\ln(x)} = 1$*... Il nous faut donc la limite en* 0 *de* $\dfrac{\ln\big(\frac{x}{2}\big)}{\ln(x)}$

Pour tout $x \in]0\ ;\ 1[$, $\dfrac{\ln\big(\frac{x}{2}\big)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(x) - \ln(2)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(x)}{\ln(x)} - \dfrac{\ln(2)}{\ln(x)} = 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(x)}$.

Pourquoi « pour tout $x \in]0\ ;\ 1[$ » ? Pour éviter l'annulation du ln au dénominateur (et comme nous voulons la limite en 0, cela ne nous pose pas de problème de nous limiter à cet intervalle)

Donc, par quotient et somme de limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(x)} = 1$

Et comme, pour tout $x \in]0;\ 1[$, $\dfrac{\ln\left(\text{th}(\frac{x}{2})\right)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln\left(\text{th}(\frac{x}{2})\right)}{\ln\left(\frac{x}{2}\right)} \times \dfrac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(x)}$, nous obtenons enfin, par produit de limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\left(\text{th}(\frac{x}{2})\right)}{\ln(x)} = 1}$

Exercice 12

Apprends à provoquer l'aide tant espérée
des alliées dénommées croissances comparées.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min) (**) *d'après HEC ESSEC 2020 ECS*

On note u l'application définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\},\ u(t) = \dfrac{t}{1-t}e^{-1/t}$

1) Justifier que la limite à droite de la fonction u en 0 est nulle. Quelle est la limite à gauche de la fonction u en 0 ?

2) Démontrer qu'il existe une fonction polynomiale P, que l'on précisera, telle que : $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\},\ u'(t) = \dfrac{1}{P(t)}e^{-1/t}$

3) Dresser le tableau de variations complet de la fonction u.

Remarques sur l'énoncé :

$\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ n'est autre que $]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

Lorsque l'on vous demande (question 3) un tableau de variations complet d'une fonction, vous devez notamment y faire figurer les limites.

Correction de l'exercice 12 :

1) *Un calcul direct de limite suffit. Eh oui, ça arrive...*

On a : $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{t} = +\infty$. Donc : $\lim\limits_{t\to 0^+} -\dfrac{1}{t} = -\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$.
Donc, par composition de limites : $\lim\limits_{t\to 0^+} e^{-1/t} = 0$. Par ailleurs : $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t}{1-t} = 0$
Enfin, par produit de limites, on a bien : $\boxed{\lim\limits_{t\to 0^+} u(t) = 0}$

Par contre, pour la limite en 0^-, on voit une forme indéterminée pointer son nez... Plus précisément, une forme indéterminée du type « $0\times\infty$ ». L'exponentielle l'emportera-t-elle ? Une croissance comparée (correctement mise en évidence) nous permettrait de conclure... Ce qui se trouve « dans l'exponentielle » ($-\dfrac{1}{t}$) tend vers $+\infty$ en 0^-. Et on peut se débrouiller pour le mettre en évidence à l'extérieur de cette exponentielle. Un petit changement de variable...

Posons $x = -\dfrac{1}{t}$ (de manière équivalente, $t = -\dfrac{1}{x}$). On a : $\lim\limits_{t\to 0^-} x = +\infty$.
Et $\dfrac{t}{1-t}e^{-1/t} = -\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}e^x = -\dfrac{1}{x(1+\frac{1}{x})}e^x = -\dfrac{e^x}{x}\times\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$

Oui, j'aurais pu écrire $= -\dfrac{e^x}{x+1}$, mais je préfère mon écriture pour calculer la limite plus efficacement.

Par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
Et, par somme et quotient de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{e^x}{x}\times\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = -\infty$

D'où : $\lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{t}{1-t}e^{-1/t} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}\times\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = -\infty$

Finalement : $\boxed{\lim\limits_{t\to 0^-} u(t) = -\infty}$

2) u est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ par composée, produit et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions dérivables.

Pour tout $t\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$, $u'(t) = \dfrac{1\times(1-t)-t\times(-1)}{(1-t)^2}e^{-1/t} + \dfrac{t}{1-t}\times\dfrac{1}{t^2}\times e^{-1/t}$

On a dérivé u comme un produit et, plus spécifiquement, $t \mapsto e^{-1/t}$ a été dérivée comme une composée.

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$, $u'(t) = \left(\dfrac{1}{(1-t)^2} + \dfrac{t}{(1-t)t^2}\right)e^{-1/t}$

Mettons tout simplement au même dénominateur, à savoir $t^2(1-t)^2$:

$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$, $u'(t) = \dfrac{t^2+t(1-t)}{t^2(1-t)^2}e^{-1/t} = \dfrac{t}{t^2(1-t)^2}e^{-1/t} = \dfrac{1}{t(1-t)^2}e^{-1/t}$

Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$, $u'(t) = \dfrac{1}{P(t)}e^{-1/t}$, où P est la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $P(t) = t(1-t)^2$

3) Pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}, e^{-1/t} > 0$, donc $u'(t)$ est du signe de $P(t)$, c'est-à-dire de t (car $(1-t)^2 > 0$).

On obtient ainsi le tableau de signe de $u'(t)$, puis le tableau de variations de u :
(Attention à ne pas oublier les valeurs interdites, ou l'on risquerait d'obtenir un tableau de variations bien différent de la réalité !)

t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$u'(t)$		$-$	‖	$+$	‖	$+$	
u	-1	↘	‖ $-\infty$ 0 ‖	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ‖	↗	-1

Pour les limites : nous avions déjà celles à droite et à gauche en 0 (cf question 1).

<u>En $-\infty$</u> :

$\lim\limits_{t\to-\infty} -\dfrac{1}{t} = 0$, donc, par continuité de la fonction exponentielle en 0 : $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{-1/t} = e^0 = 1$
Et $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{t}{1-t} = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{t}{t\left(\frac{1}{t}-1\right)} = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{t}-1} = -1$. Par produit de limites : $\boxed{\lim\limits_{t\to-\infty} u(t) = -1}$

*Si vous ne l'avez pas vu l'année passée, vous pourrez bientôt utiliser le fait que la limite d'un quotient de polynômes **en** $+\infty$ **ou en** $-\infty$ est égale à la limite du quotient des*

termes de plus haut degré. Autrement dit, ici : $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{t}{1-t} = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{t}{-t} = -1$. *Directement, sans passer par la case factorisation.*

En $+\infty$:

un calcul tout à fait similaire donne : $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = -1}$

En 1^- et en 1^+ :

$\lim\limits_{t\to1} -\dfrac{1}{t} = -1$, donc, par continuité de la fonction exponentielle en -1 : $\lim\limits_{t\to1} e^{-1/t} = e^{-1}$
D'autre part, par quotient de limites : $\lim\limits_{t\to1^-} \dfrac{t}{1-t} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to1^+} \dfrac{t}{1-t} = -\infty$
En effet : $\lim\limits_{t\to1} 1-t = 0$, *avec* $1-t > 0$ *si* $t < 1$, *et* $1-t < 0$ *si* $t > 1$
Donc, par produit de limites ($e^{-1} > 0$) : $\boxed{\lim\limits_{t\to1^-} u(t) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{t\to1^+} u(t) = -\infty}$

Une inattention courante : le produit d'une quantité tendant vers $+\infty$ et d'une quantité tendant vers $a \neq 0$ tend vers $+\infty$ ***si*** *$a > 0$ (et $-\infty$ si $a < 0$). Cela peut sembler évident énoncé ainsi, mais, pour peu que le signe de a ne saute pas automatiquement aux yeux, on a tendance à oublier que ce signe a une telle importance dans le résultat (par une compréhension détournée du style « oui mais $+\infty$ est plus fort »*

Il est toujours bon, après avoir obtenu les limites, de s'assurer que le tableau de variation est cohérent. Ne faites surtout pas l'aveugle si vous obtenez une situation cocasse comme celle-ci, par exemple :

t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$		$+$		$+$	
f	-1	↘	0	↗	$+\infty$	↗	1
			0				$-\infty$

Passer d'une limite égale à -1 à une limite égale à 0 en décroissant... Ne faites pas l'aveugle vous disais-je, bien au contraire : considérez cette incohérence comme une bénédiction, parce qu'elle vous aura mis la puce à l'oreille. Vous êtes certain d'avoir fait une erreur (que ce soit sur les variations de f ou sur ses limites). Trouvez-la, et corrigez-la.

Exercice 13

Veilles et lendemains, crépuscule et levant.
L'un rebrousse chemin, l'autre va de l'avant.

Énoncé : (temps conseillé : 40 min) (****) *d'après Ecricome 2016 ECS*

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, on note $I_{a,b}$ le réel défini par $I_{a,b} = \displaystyle\int_0^1 x^a(1-x)^b \, \mathrm{d}x$

1) Calculer $I_{a,0}$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ I_{a,b} = \dfrac{b}{a+1} I_{a+1,b-1}$

3) En déduire que : $\forall\ (a,b) \in \mathbb{N}^2, I_{a,b} = \dfrac{a! \times b!}{(a+b+1)!}$

Remarques sur l'énoncé :

Si les notations $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ vous laissent perplexe, revenez ici.

Rappelons en outre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n!$ est le produit des entiers de 1 à n. Autrement dit : $n! = 1 \times 2 \times ... \times n$. Et, par convention, $0! = 1$.
Cela donne une relation de récurrence triviale mais utile : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = (n+1) \times n!$

Enfin, l'intégrale $I_{a,b}$ introduite par l'énoncé ne dépend que des entiers naturels a et b, et certainement pas de x, qui est une variable d'intégration muette.
On a aussi, par exemple : $I_{a,b} = \displaystyle\int_0^1 t^a(1-t)^b \, \mathrm{d}t$

Correction de l'exercice 13 :

1) *Il suffit de remplacer b par 0 dans l'expression de $I_{a,b}$*

Pour tout $a \in \mathbb{N}$, $I_{a,0} = \displaystyle\int_0^1 x^a(1-x)^0 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^a \,\mathrm{d}x$ *Rappelons que :* $\forall t \in \mathbb{R}$, $t^0 = 1$

Donc : pour tout $a \in \mathbb{N}$, $I_{a,0} = \left[\dfrac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \dfrac{1^{a+1}}{a+1} - \dfrac{0^{a+1}}{a+1}$.

Or, $a+1 \in \mathbb{N}^*$ donc $0^{a+1} = 0$ (*précision utile car* $0^0 = 1$ *par convention...*)

Finalement, pour tout $a \in \mathbb{N}$, $I_{a,0} = \dfrac{1}{a+1}$

2) *Un truc qui peut sembler tout bête, mais qui peut aider à y voir plus clair : écrire, pour soi, les intégrales en jeu.*
Pour tous $a \in \mathbb{N}$ *et* $b \in \mathbb{N}^*$, $I_{a,b} = \displaystyle\int_0^1 x^a(1-x)^b \,dx$ *et* $I_{a+1,b-1} = \int_0^1 x^{a+1}(1-x)^{b-1} \,dx$
Dès lors, comment faire apparaître la seconde à partir de la première ? La puissance sur le x doit augmenter de 1, et celle sur le $(1-x)$ doit diminuer de 1. Ne s'agirait-il pas de dériver l'un et de primitiver l'autre, à l'aide d'une technique bien connue ?

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
Les fonctions $u : x \mapsto (1-x)^b$ et $v : x \mapsto \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$ sont dérivables sur $[0;1]$, et leurs dérivées u' et v' sont continues sur ce segment. *(important à préciser pour faire une IPP)*
Ce qui se dira, de manière plus courte : u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ (cf ici)

De plus : $\forall x \in [0;1]$, $u'(x) = -b(1-x)^{b-1}$ et $v'(x) = x^a$

Pour $u'(x)$, ne pas oublier que l'on dérive une composée, et qu'il y a un -1 en facteur en dérivant $1-x$.
Par ailleurs, l'information $b \in \mathbb{N}^*$ est importante pour cette dérivation de $u(x)$. Si $b = 0$, on ne peut pas utiliser cette formule (dans ce cas, on aurait eu $u(x) = 1$ et $u'(x) = 0$. D'aucuns rétorqueraient : « mais si regarde, la formule marche encore, en remplaçant b par 0, cela donne : $u'(x) = -0 \times (1-x)^{-1} = \dfrac{0}{1-x} = 0$ » ... D'accord, et pour $x = 1$, vous ne voyez aucun problème ?

Et on a : $I_{a,b} = \displaystyle\int_0^1 u(x)v'(x) \,\mathrm{d}x$. Une intégration par parties (IPP) fournit donc :

$$I_{a,b} = \Big[u(x)v(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \left[(1-x)^b \times \frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 - \int_0^1 -b(1-x)^{b-1} \times \frac{x^{a+1}}{a+1}\,\mathrm{d}x$$

Donc, par linéarité : *(pour sortir la constante multiplicative* $-\dfrac{b}{a+1}$ *de l'intégrale)*

$$I_{a,b} = 0^b \times \frac{1^{a+1}}{a+1} - 1^b \times \frac{0^{a+1}}{a+1} + \frac{b}{a+1}\int_0^1 (1-x)^{b-1} \times x^{a+1}\,\mathrm{d}x$$

$b \in \mathbb{N}^*$ et $a+1 \in \mathbb{N}^*$ (car $a \in \mathbb{N}$), donc $0^b = 0$ et $0^{a+1} = 0$. D'où :

$$I_{a,b} = \frac{b}{a+1}\int_0^1 (1-x)^{b-1} \times x^{a+1}\,\mathrm{d}x.$$

Vous ne reconnaissez personne ? Un petit coup d'oeil à l'énoncé si vous avez oublié ce que l'on voulait montrer...

Nous avons bien montré : $\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ I_{a,b} = \dfrac{b}{a+1}\, I_{a+1,b-1}}$

3) *Question particulièrement délicate. C'est elle qui m'a décidé à rajouter une quatrième étoile à l'exercice... Notre seul petit rayon de soleil, c'est que l'énoncé nous donne l'expression à laquelle il faut aboutir. Il faut la montrer pour tout* $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$*... Peut-être que... Une récurrence ? ? Mais il y a deux entiers dans l'affaire, et tous deux semblent bien décider à varier, en tous cas si l'on en croit la relation de récurrence obtenue en 2).*

Une telle récurrence devra porter sur l'un de ces deux entiers, a ou b. mais lequel ? Un petit coup d'oeil au résultat de la 1)... Cela ressemble beaucoup à une initialisation pour $b = 0$*. C'est donc décidé ! La récurrence portera sur ce b et, logiquement, c'est une propriété* P_b *qui sera à démontrer pour tout entier naturel b.*

Mais que faire de a, du coup ? Faut-il le fixer ? Cela risquerait de nous poser problème lorsqu'on voudra utiliser la relation obtenue en 2), qui fait intervenir des intégrales avec des a différents... Il faut plutôt que, dans la propriété P_b*, l'égalité soit valable pour tout entier naturel a. Voyez plutôt :*

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel b, la propriété P_b :
« $\forall a \in \mathbb{N},\ I_{a,b} = \dfrac{a! \times b!}{(a+b+1)!}$ » est vraie.

Il est logique que cette propriété s'appelle P_b*, et non* $P_{a,b}$ *: elle ne dépend pas de a, puisqu'elle stipule que l'égalité doit être vérifiée* ***pour tout*** $a \in \mathbb{N}$

Initialisation : pour $b = 0$: D'une part, d'après 1), on a : $\forall a \in \mathbb{N},\ I_{a,0} = \dfrac{1}{a+1}$.

D'autre part, on a : $\forall a \in \mathbb{N},\ \dfrac{a! \times 0!}{(a+0+1)!} = \dfrac{a! \times 1}{(a+1)!} = \dfrac{a!}{(a+1) \times a!} = \dfrac{1}{a+1}$.

Nous avons bien montré : $\forall a \in \mathbb{N},\ I_{a,0} = \dfrac{a! \times 0!}{(a+0+1)!}$, et P_0 est donc vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier naturel b, P_b soit vraie, c'est-à-dire $\forall a \in \mathbb{N},\ I_{a,b} = \dfrac{a! \times b!}{(a+b+1)!}$, et montrons P_{b+1}.

Autrement dit, montrons : $\forall a \in \mathbb{N},\ I_{a,b+1} = \dfrac{a! \times (b+1)!}{(a+b+2)!}$.

La relation 2) étant valable pour tout $a \in \mathbb{N}$ et pour tout $b \in \mathbb{N}^*$, elle reste valable avec $b+1$, qui appartient à $\mathbb{N}^*$ dès lors que b appartient à $\mathbb{N}$.

$b+1 \in \mathbb{N}^*$. La relation obtenue en 2) fournit donc : $\forall a \in \mathbb{N},\ I_{a,b+1} = \dfrac{b+1}{a+1} I_{a+1,b}$ (*)

Mais connaissons-nous l'expression de $I_{a+1,b}$? Oui ! Grâce à l'hypothèse de récurrence P_b, valable pour n'importe quel entier naturel a. Donc l'égalité donnée dans P_b reste valable en remplaçant a par $a+1$

L'hypothèse de récurrence permet d'affirmer : $\forall a \in \mathbb{N},\ I_{a+1,b} = \dfrac{(a+1)! \times b!}{(a+1+b+1)!} = \dfrac{(a+1)! \times b!}{(a+b+2)!}$

Donc, d'après (*) : $\forall a \in \mathbb{N},\ I_{a,b+1} = \dfrac{b+1}{a+1} \times \dfrac{(a+1)! \times b!}{(a+b+2)!} = \dfrac{(b+1)! \times a! \times (a+1)}{(a+1)(a+b+2)!}$

Finalement, nous avons bien montré : $\forall a \in \mathbb{N},\ I_{a,b+1} = \dfrac{a! \times (b+1)!}{(a+b+2)!}$. P_{b+1} est donc vraie.

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure :
$\forall b \in \mathbb{N} : \forall a \in \mathbb{N},\ I_{a,b} = \dfrac{a! \times b!}{(a+b+1)!}$

Autrement dit : $\boxed{\forall\ (a,b) \in \mathbb{N}^2, I_{a,b} = \dfrac{a! \times b!}{(a+b+1)!}}$

Exercice 14

Routine régulière... J'attends que le temps passe,
gardant les pieds sur terre dans mon sous-espace.

Énoncé : (temps conseillé : 30 min) (**) *d'après EM Lyon 2012 ECS*

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale (rappel de ce que ça veut dire ici). On notera θ le polynôme nul.

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ (c'est-à-dire, tout simplement, un ensemble d'éléments qui appartiennent tous à $\mathbb{R}[X]$: peut-être $\mathbb{R}[X]$ tout entier, peut-être pas).
On dit que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :
(i) A est non vide (c'est-à-dire qu'il existe au moins un élément de $\mathbb{R}[X]$ appartenant à A)
(ii) pour tous réels a et b, pour tous polynômes P et Q appartenant à A, le polynôme $aP+bQ$ appartient aussi à A.

On considère l'ensemble E des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :
$\forall x \in]0;+\infty[,\ P(x)>0$ et $P'(x)>0$

1) Montrer que si A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, alors $\theta \in A$.

2) Donner un exemple d'élément de E.

3) Montrer que E est stable par multiplication par un réel strictement positif, par addition et par multiplication, c'est-à-dire que, pour tout $\alpha \in]0;+\infty[$ et tous $P,Q \in E$, on a : $\alpha P \in E$, $P+Q \in E$, et $PQ \in E$. E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?

4) Soit $P \in E$. Montrer que : $\forall x \in [0;+\infty[,\ P(x) \geq P(0)$

Remarques sur l'énoncé :

L'énoncé introduit la notion de sous-espace vectoriel (en la définissant afin qu'elle soit utilisable sans autres prérequis que le programme de Terminale), sans même avoir introduit la définition d'espace vectoriel (plus riche, et pas nécessaire pour la résolution de l'exercice) que vous verrez en première année. Pour faire (très) simple, un espace vectoriel est un ensemble d'éléments muni de deux lois (ou opérations) satisfaisant certaines règles sur cet ensemble. En particulier, $\mathbb{R}[X]$ muni de la loi interne + (addition entre deux polynômes) et de la loi externe . (multiplication d'un polynôme par un réel) est un espace vectoriel.

Correction de l'exercice 14 :

1) *Lorsqu'une hypothèse à notre disposition nous assure de la véracité d'une proposition « pour tous réels a et b », il faut se rendre compte de l'aubaine... On a le droit de choisir n'importe quels réels a et b et ça reste vrai !*
Toutefois, gardez en tête que le droit de faire une chose ne garantit pas son utilité... Mais ici, cela me semble particulièrement utile de profiter du droit de choisir a et b dans (ii) pour obtenir le polynôme nul.
Mais pour pouvoir utiliser (ii), je dois faire intervenir des polynômes P et Q de A. Qu'est-ce qui m'assure leur existence ? Le fait que A soit non vide m'assure l'existence d'au moins un polynôme de A...

Si A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, la condition (i) nous assure qu'il existe (au moins) un polynôme P de A.
Mais rien ne m'assure, a priori, l'existence, dans A, d'un autre polynôme Q différent de P. Qu'à cela ne tienne...

La condition (ii) nous assure, en choisissant $a = 0$ et $b = 0$, que le polynôme $0 \times P + 0 \times P$ appartient à A. Autrement dit, le polynôme nul θ appartient à A.

Mais... On a mis deux fois P ? Ben oui, j'en ai tout à fait le droit. Pour ce qui est de (ii), rien ne m'interdit, dans le choix de P et Q, de prendre, si ça m'arrange, le même polynôme (de même que rien ne m'a interdit de choisir a et b égaux, comme je l'ai fait). Et cela m'arrange particulièrement de prendre deux fois P, n'ayant aucune garantie de l'existence d'un autre polynôme que Q dans A.

Nous avons bien montré : si A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, alors $\theta \in A$.

2) *Il faut tout simplement trouver une fonction polynomiale strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, et dont la dérivée aussi est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On a l'embarras du choix...*
Soit P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $P(x) = x > 0$ (trivial). Et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $P'(x) = 1 > 0$. Donc $P \in E$

3) *Pas besoin de nous attarder sur l'expression « stable par... » , l'énoncé nous l'explique en la reformulant. Concentrons-nous donc sur ce qu'il y a après « c'est-à-dire »*

Soit α un réel strictement positif, et soient P et Q deux polynômes de E.

Le polynôme αP a pour dérivée $(\alpha P)' = \alpha P'$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $P(x) > 0$ et $P'(x) > 0$ (car $P \in E$). Comme $\alpha > 0$, on a donc :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\alpha P)(x) > 0$ et $(\alpha P)'(x) > 0$. Cela prouve que $\alpha P \in E$

Le polynôme $P+Q$ a pour dérivée $(P+Q)' = P' + Q'$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $P(x) > 0$, $Q(x) > 0$ et $P'(x) > 0, Q'(x) > 0$ (car $P, Q \in E$). Donc :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) > 0$ et $(P+Q)'(x) = P'(x) + Q'(x) > 0$. D'où : $\alpha P + Q \in E$

Enfin, le polynôme PQ a pour dérivée $(PQ)' = P'Q + PQ'$
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(PQ)(x) = P(x)Q(x) > 0$ (par produit de deux réels strictement positifs)
Et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(PQ)'(x) = P'(x)Q(x) + P(x)Q'(x) > 0$ (par produits et somme de deux réels strictement positifs). Donc : $PQ \in E$
Attention à ne pas tomber dans un piège (typographique ?) en écrivant $(PQ)'(x) = P'(x)Q'(x)$

Nous avons bien montré que E est stable par multiplication par un réel strictement positif, par addition et par multiplication.

Est-ce que pour autant, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$*? On peut se perdre dans les conditions données par l'énoncé pour le savoir. Ou alors, on peut utiliser ce qui a été fait en 1)...*
Le résultat de 1) nous dit que si A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$*, alors* $\theta \in A$*. Autrement dit « θ ∈ A » est une condition nécessaire pour que A soit un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}[X]$*...*
Dans le cas précis de l'ensemble E, si l'on voit que $\theta \in E$*, on ne peut rien dire (on a dit condition nécessaire, pas suffisante...). Par contre, si l'on voit que* $\theta \notin E$*, on peut conclure que E n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}[X]$*, car il ne vérifie pas la condition nécessaire pour l'être.*

Plus généralement, lorsque p et q sont deux assertions mathématiques, l'implication $p \Longrightarrow q$ *est équivalente à sa* ***contraposée*** *:* $Non(q) \Longrightarrow Non(p)$
Il semble en effet relativement intuitif que si q est une condition nécessaire à p, l'absence de q implique l'absence de p.
Une erreur courante est de considérer que $p \Longrightarrow q$ *entraînerait que* $Non(p) \Longrightarrow Non(q)$

Ca ne tient pas la route : « s'il y a un incendie, alors il y a de la fumée » n'entraîne pas « s'il y a de la fumée, alors il y a un incendie ».
Par contre, « s'il y a un incendie, alors il y a de la fumée » entraîne bien « s'il n'y a pas de fumée, alors il n'y a pas d'incendie »
Revenons à nos moutons...

E est l'ensemble des polynômes strictement positifs sur $\mathbb{R}_+^*$ et à dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, ce n'est pas le cas du polynôme nul θ. (pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta(x) = 0$).

En 1), nous avions montré : « A sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X] \implies \theta \in A$ »
Par contraposition, si $\theta \notin A$, alors A n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

θ n'appartenant pas E, nous pouvons en conclure ce qui suit :
E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

4) *C'est une question relativement simple si l'on sait garder les pieds sur terre. Autrement dit, si l'on ne laisse pas les nouvelles définitions introduites par l'énoncé nous faire oublier les propriétés les plus basiques que nous connaissons...*

Soit $P \in E$. Par définition, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, P'(x) > 0$.
Donc P est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
P étant une fonction polynomiale, elle est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en 0. Sa stricte croissance sur $]0;+\infty[$ entraîne donc sa stricte croissance sur $[0;+\infty[$

Du fait de la continuité de P en 0, il n'y a pas de « saut » en 0, et la stricte croissance de P sur $]0;+\infty[$ revient alors à sa stricte croissance sur $[0;+\infty[$

P étant (strictement) croissante sur $[0;+\infty[$, on a bien : $\forall x \geq 0,\ P(x) \geq P(0)$.

Autrement dit : $\forall x \in [0;+\infty[,\ P(x) \geq P(0)$

Exercice 15

En sous-marin caché sous le signe intégrale,
ce sigma va gâter plus d'un été naval.

Énoncé : (temps conseillé : 35 min) (***) *d'après Ecricome 2010 ECS*

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k} \, \mathrm{d}t$

1) Montrer que : $\forall n \geq 1,\ \forall t \in [0;1[,\ \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k} - (1-t) = \dfrac{(1-t)t^n}{1-t^n}$

2) Justifier que pour tout $n \geq 1$, u_n est bien défini.

3) Montrer que : $\forall n \geq 1,\ 0 \leq u_n - \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{n+1}$

4) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Remarques sur l'énoncé :

Une somme au dénominateur dans une intégrale... C'est vrai que ça peut piquer les yeux. Pourtant, l'écriture est relativement anodine, et il faut vous y habituer. Mais bon, faisons preuve de clémence, et réécrivons l'intégrale et la première question telles qu'elles figurent dans le sujet original :

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2+\ldots+t^{n-1}} \, \mathrm{d}t$

1) Montrer que : $\forall n \geq 1,\ \forall t \in [0;1[,\ \dfrac{1}{1+t+t^2+\ldots+t^{n-1}} - (1-t) = \dfrac{(1-t)t^n}{1-t^n}$

Correction de l'exercice 15 :

1) *Comment transformer cette expression horrible (en apparence) avec une telle somme au dénominateur ? En se souvenant d'un résultat du cours sur les sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique...*
Pour tout $n \geq 1$, pour tout $t \in [0;1[$, on a, en reconnaissant une somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $t \neq 1$: $\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$

Formule qu'il est bon de connaître en « français » , pour éviter de mettre par exemple, du $n+1$ mécaniquement en exposant, sans comprendre d'où il vient...
En français, la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est égale à : 1^{er} terme de la somme $\times \frac{1-q^{nb\ de\ termes}}{1-q}$
Ici, le premier terme, t^0, est égal à 1, mais attention à ne surtout pas l'oublier lorsqu'il vaudra autre chose... Quant au nombre de termes entre 0 et $n-1$ compris, il y en a bien n (n'oubliez pas de compter 0). Le $n+1$ que vous voyez souvent en exposant vient du fait que les sommes que vous considériez allaient souvent de 0 à n.

Enfin, il est important de préciser que la raison est différente de 1 (sinon, $1-q=0$ et vous diviseriez par 0 au dénominateur... Dans le cas où la raison est égale à 1, votre suite géométrique est constante et il devient encore plus facile de calculer la somme de ses termes. Plus de détails dans de cette vidéo de la playlist sur le signe $\sum$.

De plus, pour tout $t \in [0;1[$, $t \neq 1$ et $t \neq -1$, donc $t^n \neq 1$, et donc $1-t^n \neq 0$

C'est ce qui va nous permettre l'inversion de l'expression obtenue.

D'où : $\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k} = \frac{1-t}{1-t^n}$. Il s'ensuit : $\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k} - (1-t) = \frac{1-t}{1-t^n} - (1-t) = \frac{1-t-(1-t)(1-t^n)}{1-t^n}$

Par suite : $\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k} = \frac{(1-t)(1-1+t^n)}{1-t^n} = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}$.

On a bien montré : $\boxed{\forall n \geq 1,\ \forall t \in [0;1[,\ \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k} - (1-t) = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k} = \dfrac{1}{1+t+\ldots+t^{n-1}}$.

f est continue sur $[0;1]$ car c'est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;1]$.

Rappel : une fonction rationnelle est un quotient de deux fonctions polynomiales. On pouvait aussi dire : f est continue sur $[0;1]$ par quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de telles fonctions.

L'intégrale $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc bien définie. Autrement dit, u_n est bien défini.

Nous avons bien montré : $\boxed{\forall n \geq 1, u_n \text{ est bien défini}}$

3) Pour tout $n \geq 1$, $u_n - \dfrac{1}{2} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k}\,\mathrm{d}t \;-\; \frac{1}{2}$

Pour obtenir l'encadrement demandé, s'agit-il de trouver un encadrement de u_n, puis ensuite de soustraire $\dfrac{1}{2}$ à chaque membre ? Un peu bizarre... À ce compte-là, l'énoncé (à supposer qu'il soit bien fait) nous aurait peut-être juste demandé un encadrement de u_n. Et si l'on veut directement un encadrement de $u_n - \dfrac{1}{2}$, le fait que $\dfrac{1}{2}$ soit en-dehors de l'intégrale n'arrange pas spécialement nos affaires. Un petit coup d'oeil à la question 1...

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k} - (1-t)$ est continue sur $[0;1]$ (par somme de la fonction f, introduite en 2 et continue sur $[0;1]$, et de $t \mapsto -(1-t)$, continue sur $[0;1]$).

Par linéarité : $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k} - (1-t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t = u_n - \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1$

$= u_n - \left(1 - \dfrac{1^2}{2}\right) + \left(0 - \dfrac{0^2}{2}\right) = u_n - \dfrac{1}{2}$ *Tiens donc...*

Maintenant que l'on sait exprimer $u_n - \dfrac{1}{2}$ comme une seule intégrale (aussi laide soit-elle), on va pouvoir l'encadrer de manière classique, en tentant d'encadrer la fonction sous le signe intégrale, pour ensuite utiliser la croissance de l'intégrale...

D'après 1), pour tout $t \in [0;1[$, $\dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k} - (1-t) = \dfrac{(1-t)t^n}{1-t^n}$

L'égalité n'est pas valable pour $t=1$. Pas grave ! Nous y reviendrons au moment voulu... On espère maintenant encadrer $t \mapsto \dfrac{(1-t)t^n}{1-t^n}$ par deux fonctions dont les intégrales sur $[0;1]$ donneraient respectivement 0 et $\dfrac{1}{n+1}$. Pour ce qui donnerait 0, c'est assez trivial, mais pour $\dfrac{1}{n+1}$? C'est quoi, une primitive de $t \mapsto t^n$ déjà ?

Pour tout $t \in [0;1[$, $0 \leq \dfrac{(1-t)t^n}{1-t^n}$ (car $1-t>0$, $t \geq 0$ et $1-t^n>0$)

Et *(plus difficile à voir)* : pour tout $t \in [0;1[$, $t^n \leq t$ (car $t^n - t = t(t^{n-1}-1)$ avec $t \geq 0$ et $t^{n-1}-1<0$)
Donc $-t \leq -t^n$ et $1-t \leq 1-t^n$. Puis, en divisant la dernière inégalité par $1-t^n>0$, on obtient : $\dfrac{1-t}{1-t^n} \leq 1$. Enfin, en multipliant par $t^n \geq 0$: $\dfrac{(1-t)t^n}{1-t^n} \leq t^n$

Nous avons donc montré que pour tout $t \in [0;1[$, $0 \leq \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k} - (1-t) \leq t^n$

Par croissance de l'intégrale : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} t^k} - (1-t)\right) \mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t$

Mais... L'encadrement précédent était valable pour $t \in [0;1[$, pas pour $t=1$! Pas de panique. Une différence de valeur en un point ne change rien au regard des intégrales, du moment qu'elles existent bien (c'est le cas par continuité des fonctions intégrées)

Autrement dit : $0 \leq u_n - \dfrac{1}{2} \leq \left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{0}{n+1}$ $\quad \left(0^{n+1}=0 \text{ car } n+1 \in \mathbb{N}^*\right)$

Nous avons bien montré que : $\boxed{\forall n \geq 1,\ 0 \leq u_n - \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{n+1}}$

4) *La question précédente était difficile. En contrôle, si vous bloquez trop longtemps dessus, n'hésitez pas à jeter un oeil sur celle-ci, bien plus simple... Il suffit d'admettre le résultat de la 3) (ce dont vous avez tout à fait le droit, on ne va pas vous pénaliser deux fois pour ne pas avoir réussi cette question) et de vous en servir !*

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes appliqué à l'encadrement obtenu en 3) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \dfrac{1}{2} = 0$. Enfin : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}}$

Exercice 16

Pour quiconque se fâche et le fait sans passion,
la parenthèse cache un point d'exclamation.

Énoncé : (temps conseillé : 40 min) (**) *d'après EM Lyon 2022 ECS*

On rappelle que pour tous entiers naturels n et k tels que $n \geq k$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Et, par convention, si $k > n$: $\binom{n}{k} = 0$

Soit (c_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

1) Calculer c_0, c_1 et c_2

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$

3) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n \in \mathbb{N}$

4) Montrer que (c_n) est croissante.

5) Etudier la limite de (c_n)

Remarques sur l'énoncé et rappels :

Rappelons que pour tout entier naturel non nul n, $n!$ (lire « n factorielle ») est le produit des entiers de 1 à n : $n! = 1 \times 2 \times ... \times n$. Et, par convention : $0! = 1$

La convention adoptée par l'énoncé (si $k > n$: $\binom{n}{k} = 0$) n'a rien de choquant si l'on revient à la définition de $\binom{n}{k}$. C'est le nombre de parties à k éléments dans un ensemble qui en compte n. Autrement dit, c'est le nombre de combinaisons de k éléments dans un ensemble qui en compte n. C'est, par exemple, le nombre de manières de constituer un groupe de k élèves dans une classe qui en compte n.

Rappelons aussi quelques coefficients binomiaux usuels : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = 1$
Il y a en effet une seule manière de choisir 0 élève dans une classe qui en compte n : ne prendre personne.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ $(k \leq n)$, $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$. Il y a, par exemple, autant de manières de constituer un groupe de 18 élèves dans une classe qui en compte 30, que de manières de constituer un groupe de 12 élèves dans cette même classe. (chaque choix de 18 élèves de cette classe correspond exactement à un « non-choix » de 12 élèves)

Et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\binom{n}{1} = n$. Il y a en effet n manières de choisir un élève dans une classe qui en compte n.

Enfin, l'auteur de ces lignes doit vous faire l'aveu suivant : beaucoup d'indices indices verbaux de l'énoncé originel (par exemple, « En déduire... ») ont été supprimés pour vous rendre la tâche un peu plus difficile. Non pas par pur sadisme, mais pour vous entraîner à déceler par vous-même des enchaînements plus ou moins visibles...

Correction de l'exercice 16 :

1) $c_0 = \dfrac{1}{0+1}\binom{2\times 0}{0} = \binom{0}{0} = 1 \qquad c_1 = \dfrac{1}{1+1}\binom{2\times 1}{1} = \dfrac{1}{2}\times\binom{2}{1} = \dfrac{1}{2}\times 2 = 1$

$c_2 = \dfrac{1}{2+1}\binom{2\times 2}{2} = \dfrac{1}{3}\binom{4}{2} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{4\times 3\times 2}{2\times 2} = 2$ $\boxed{c_0 = c_1 = 1 \text{ et } c_2 = 2}$

2) *Il me semble plus judicieux de partir du membre de droite de l'égalité à démontrer, parce que l'on pourra le mettre sous forme de différence de fractions que l'on réduira au même dénominateur (plutôt que de partir d'une fraction qu'il faudrait - on ne sait trop comment - écrire comme différence de deux autres).*
Nous commencerons par le cas $n \geq 1$ pour avoir $n+1 \geq 2n$ dans le deuxième coefficient binomial.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \dfrac{(2n)!}{n!\times n!} - \dfrac{(2n)!}{(n+1)!\big(2n-(n+1)\big)!} = \dfrac{(2n)!}{n!\times n!} - \dfrac{(2n)!}{(n+1)!(2n-n-1)!}$

$= \dfrac{(2n)!}{n!\times n!} - \dfrac{(2n)!}{(n+1)!(2n-n-1)!} = \dfrac{(2n)!}{n!\times n!} - \dfrac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = (2n)!\left(\dfrac{1}{n!\times n!} - \dfrac{1}{(n+1)!(n-1)!}\right)$

Quel dénominateur commun choisir ? Il y a mieux à faire que prendre le produit des deux, puisque $(n+1)! = n!\times(n+1)$ et $n! = (n-1)!\times n$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = (2n)!\left(\dfrac{n+1}{n!\times n!\times(n+1)} - \dfrac{n}{(n+1)!(n-1)!\times n}\right)$

$= (2n)!\left(\dfrac{n+1}{n!\times(n+1)!} - \dfrac{n}{(n+1)!\times n!}\right) = (2n)!\times\dfrac{1}{n!\times(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}\times\dfrac{(2n)!}{n!\times n!}$

J'ai mis $\dfrac{1}{n+1}$ en facteur parce que je le veux dans mon expression finale

Enfin : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\times\dfrac{(2n)!}{n!\times(2n-n)!} = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = c_n$

Mais n'oublions pas le cas $n = 0$

De plus : $\binom{2\times 0}{0} - \binom{2\times 0}{0+1} = 1 - \binom{0}{1} = 1 - 0 = 1$ *Rappel :* $\binom{n}{k} = 0$ *pour* $k < n$

Et $c_0 = \dfrac{1}{0+1}\binom{2\times 0}{0} = 1$. La formule établie précédemment est bien valable pour $n = 0$.

Nous avons bien montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}}$

3) *Une question mignonne, dont la résolution avantage les élèves capables de diversifier leurs sources d'hypothèses...*
D'une part, d'après 2) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n \in \mathbb{Z}$ par différence de deux entiers.

En effet, $\binom{2n}{n}$ *et* $\binom{2n}{n+1}$ *sont deux entiers (naturels) par définition. Mais à ce stade, nous savons juste que* c_n *est un entier relatif. Que lui faut-il de plus pour être un entier naturel ?*
D'autre part, par définition de c_n, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \geq 0$
c_n *est donc un entier relatif positif. Autrement dit, un entier naturel...*

Nous avons bien montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ c_n \in \mathbb{N}}$

4) *Y a-t-il un lien simple facilement exploitable entre* c_{n+1} *et* c_n *? Quelle opération effectuer ? Leur différence ? Leur quotient ? Ce dernier me semble plus pertinent, en partant de la définition initiale de* c_n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n > 0$ (le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ étant un entier naturel non nul)
Et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{1}{n+2}\dbinom{2(n+1)}{n+1} \times \dfrac{n+1}{\dbinom{2n}{n}} = \dfrac{1}{n+2} \times \dfrac{(2n+2)!}{\left((n+1)!\right)^2} \times \dfrac{(n+1)\times(n!)^2}{(2n)!}$
D'où : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{1}{n+2} \times \dfrac{(2n+2)(2n+1)\times(n+1)}{(n+1)^2} = \dfrac{1}{n+2} \times \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{n+1}$

Peut mieux faire...

Puis : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{1}{n+2} \times \dfrac{2(n+1)(2n+1)}{n+1} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2} = \dfrac{4n+2}{n+2}$

Il suffit de comparer cette quantité à 1.

Or, $4n+2 \geq n+2$ (car $4n+2-(n+2) = 3n \geq 0$). Et $n+2 > 0$. Donc : $\dfrac{4n+2}{n+2} \geq 1$
En conclusion, $\boxed{(c_n) \text{ est bien une suite croissante.}}$

5) *Un calcul de limite avec des coefficients binomiaux, c'est une autre paire de manches... Mais sommes-nous tenus à un tel calcul ? Que savons-nous à ce stade ?*
(c_n) est croissante, donc soit elle converge vers un réel l, soit elle diverge vers $+\infty$.

Mais regardez un peu l'expression de $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ *obtenue précédemment, à savoir* $\frac{4n+2}{n+2}$

$\forall n \geq 1,\ \frac{4n+2}{n+2} = \frac{n\left(4+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{4+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}}$. Par opérations sur les limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 4$

Dès lors, il serait bien étrange que (c_n) *converge...*

Supposons par l'absurde que (c_n) converge vers un réel l. Comme $c_0 = 1$ et que (c_n) est croissante, $l \geq 1$ donc $l \neq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} c_n$. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_{n+1} = l$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n+2}{n+2} c_n = 4l$.

Par unicité de la limite : $4l = l$ d'où : $3l = 0$ puis $l = 0$. ABSURDE. Donc (u_n) ne converge pas.

Finalement : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty}$

Exercice 17

Toutes ces conditions à lire...
Faut-il pour autant en pâlir ?

Énoncé : (temps conseillé : 15 min) (**) *d'après ESSEC Maths II 2003 ECS*

On se place dans un univers Ω. Les événements considérés sont donc des parties de cet univers. L'univers Ω est appelé l'événement certain. La probabilité d'un événement A est notée $P(A)$

On appelle mesure d'incertitude (ou d'entropie) une fonction i qui à tout événement A de l'univers associe un nombre réel $i(A)$ (appelé incertitude ou entropie de A), et qui respecte les quatre conditions suivantes :
(a) $i(\Omega) = 0$
(b) Si A et son événement contraire $\overline{A}$ sont équiprobables, alors $i(A) = 1$
(c) Si A et B sont deux événements indépendants et si $P(A \cap B) \neq 0$:
alors $i(A \cap B) = i(A) + i(B)$
(d) Si $P(A) = P(B) \neq 0$, alors $i(A) = i(B)$

Soit φ une fonction définie sur $]0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout événement A de probabilité non nulle, on pose $i_\varphi(A) = \varphi\big(P(A)\big)$

1) Montrer que si φ vérifie les deux conditions :
(*) $\varphi(1) = 0$ et $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ (**) pour tout $p \in]0;1]$ et tout $q \in]0;1]$, $\varphi(pq) = \varphi(p) + \varphi(q)$
alors i_φ est une mesure d'incertitude.

2) Soient α et β deux réels, et soit f la fonction définie sur $]0;1]$ par :
$\forall x \in]0;1]$, $f(x) = \alpha \ln(x) + \beta$.
Existe-t-il des réels α et β tels que i_f soit une mesure d'incertitude ?

Remarques sur l'énoncé :

À toutes fins utiles, rappelons que deux événements A et B sont dits équiprobables lorsque $P(A) = P(B)$

Correction de l'exercice 17 :

1) Soit φ une fonction vérifiant les deux conditions (*) et (**). Montrons que i_φ vérifie les conditions (a), (b), (c) et (d).

$i_\varphi(\Omega) = \varphi\big(P(\Omega)\big) = \varphi(1)$ $\quad$ Ω *étant l'événement certain, on a* $P(\Omega) = 1$
De plus, d'après (*), $\varphi(1) = 0$. Donc $i_\varphi(\Omega) = 0$ et i_φ vérifie (a).

Si A est un événement tel que A et $\overline{A}$ sont équiprobables, c'est-à-dire tel que $P(A) = P\big(\overline{A}\big)$, on a : $P(A) + P\big(\overline{A}\big) = 1$, c'est-à-dire : $P(A) + P(A) = 1$, ou encore : $P(A) = \dfrac{1}{2}$.
Donc $i_\varphi(A) = i\big(P(A)\big) = i\big(\dfrac{1}{2}\big) = 1$ (d'après (*)). Donc i_φ vérifie (b).

Soient A et B deux événements indépendants tels que $P(A \cap B) \neq 0$.

Rappelons que si X et Y sont deux ensembles, $X \subset Y$ veut dire « X est inclus dans Y » Comme $(A \cap B) \subset A$ et $(A \cap B) \subset B$, on a $0 < P(A \cap B) \leq P(A)$ et $0 < P(A \cap B) \leq P(B)$.
D'où $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

Précision importante car il va falloir faire intervenir $i_\varphi(A)$ et $i_\varphi(B)$...
$i_\varphi(A \cap B) = \varphi\big(P(A \cap B)\big)$. Or, A et B sont **indépendants**, donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Donc $i_\varphi(A \cap B) = \varphi\big(P(A \cap B)\big) = \varphi\big(P(A) \times P(B)\big)$
En appliquant (**) avec $p = P(A) \in]0;1]$ et $q = P(B) \in]0;1]$, on obtient :
$\varphi\big(P(A) \times P(B)\big) = \varphi\big(P(A)\big) + \varphi\big(P(B)\big)$. Finalement : $i_\varphi(A \cap B) = i_\varphi(A) + i_\varphi(B)$
i_φ vérifie bien (c).

Enfin, si $P(A) = P(B) \neq 0$, $i_\varphi(A) = \varphi\big(P(A)\big)$ et $i_\varphi(B) = \varphi\big(P(B)\big)$. Donc, trivialement : $i_\varphi(A) = i_\varphi(B)$. i_φ vérifie bien (d).

Nous avons donc bien montré :

si φ vérifie les conditions (*) et (**), alors i_φ est une mesure d'incertitude.

2) *Je ne sais pas vous, mais je préfère vérifier deux conditions plutôt que quatre...*
Si l'on trouve deux réels α et β tels que f vérifie (*) et (**), alors d'après 1), i_f est une mesure d'incertitude.

Pour que f vérifie (*) et (**), il faut : $f(1)=0$ c'est-à-dire $\alpha\ln(1)+\beta=\beta=0$

Il faut aussi $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ c'est-à-dire : $\alpha\ln\left(\frac{1}{2}\right)=1$, c'est-à-dire : $\alpha=\dfrac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}=-\dfrac{1}{\ln(2)}$

Les seuls valeurs de α et β qui conviennent pour que f vérifie (*) *(on n'a pas encore parlé de (**))* sont donc $\alpha=-\dfrac{1}{\ln(2)}$ et $\beta=0$

Ces valeurs de α et β sont les seules **susceptibles** de convenir pour que f vérifie (*) et (**).

*« Susceptibles de convenir » car à ce stade, nous avons trouvé des conditions nécessaires (mais pas forcément suffisantes) sur α et β pour que f vérifie (*) et (**) : nous avons que montré que **si** f vérifie (*) et (**), **alors** $\alpha=-\dfrac{1}{\ln(2)}$ et $\beta=0$. Reste à montrer la réciproque...*

Réciproquement, si $\alpha=-\dfrac{1}{\ln(2)}$ et $\beta=0$, f est définie par : $\forall x\in\left]0;1\right],\ f(x)=-\dfrac{1}{\ln(2)}\ln(x)$

On sait déjà qu'elle vérifie (*).
De plus : pour tout $p\in\left]0;1\right]$ et tout $q\in\left]0;1\right]$:

$$f(pq)=-\frac{1}{\ln(2)}\ln(pq)=-\frac{1}{\ln(2)}\big(\ln(p)+\ln(q)\big)=-\frac{1}{\ln(2)}\ln(p)-\frac{1}{\ln(2)}\ln(q)=f(p)f(q)$$

Donc f vérifie (**).

Nous avons donc montré que si $\alpha=-\dfrac{1}{\ln(2)}$ et $\beta=0$, alors f vérifie (*) et (**), et donc (d'après 1) i_f est une mesure d'incertitude.

En conclusion, il existe bien des réels α et β tels que i_f soit une mesure d'incertitude.

Exercice 18

Je prononce Panjer ; c'est si aléatoire
que Waterloo m'enjoint à arrêter mon char...

Énoncé : (temps conseillé : 45 min) (***) *d'après Ecricome 2018 ECS*

On admet que pour tout réel x : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}=e^x$. On se place dans un univers Ω.
On rappelle que pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire telle que $X(\Omega)\subset\mathbb{N}$) : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}P(X=k)=1$
On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une relation de Panjer si $P(X=0)\neq 1$ et s'il existe un réel $a<1$ et un réel b tels que :
$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(X=k)=\left(a+\dfrac{b}{k}\right)P(X=k-1)$
Soit X une telle variable aléatoire.

1) Justifier que $P(X=0)\neq 0$

2) On suppose dans cette question que $a=0$ et que $b>0$

a) Montrer que : $\forall\ k\in\mathbb{N},\ P(X=k)=\dfrac{b^k}{k!}P(X=0)$

b) Exprimer $P(X=0)$ en fonction de b

3) On suppose dans cette question que $a<0$ et $b=-2a$. Déterminer la loi de X.

4) On considère une variable aléatoire Z suivant une loi binomiale de paramètres $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\,]0\,;1[$. Montrer que Z vérifie une relation de Panjer.

Remarques sur l'énoncé :

Rappelons que pour une variable aléatoire X définie sur un univers Ω, $X(\Omega)$ désigne l'ensemble des valeurs prises par cette variable aléatoire.

Le « rappel » , pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}P(X=k)=1$, ne vous dit probablement rien... Le principe est le même que pour une variable aléatoire à ensemble de valeurs fini. En simplifiant à outrance, c'est le fameux : « la somme des probabilités vaut 1 ». En étant plus précis : la somme des probabilités d'événements formant une partition de l'univers (ce que vous aurez plus tendance à appeler un système complet d'événements) est égale à 1.

Rappelons enfin que pour tout entier naturel non nul n, $n!$ (lire « n factorielle ») est le produit des entiers de 1 à n : $n!=1\times 2\times\ldots\times n$. Et, par convention : $0!=1$

Correction de l'exercice 18 :

1) *Je ne sais pas vous, mais quand on me donne une suite définie par récurrence, je ne suis pas trop fan d'avoir l'expression de u_k en fonction de u_{k-1}. Je préfère avoir l'expression de u_{k+1} en fonction de u_k (et, sauf erreur, c'est ce à quoi la plupart d'entre vous ont été habitués en Terminale)*

Nous savons : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(X=k-1)$
Autrement dit : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k+1) = \left(a + \frac{b}{k+1}\right) P(X=k)$

En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a bien $k+1 \in \mathbb{N}^*$, et on peut alors appliquer la relation de récurrence donnée par l'énoncé à $k+1$
Pourquoi est-il impossible qu'une telle variable aléatoire X vérifie $P(X=0)=0$? Regardez le lien entre la probabilité pour X de valoir un certain entier naturel, et la probabilité pour X de valoir l'entier naturel suivant...
Supposons par l'absurde que $P(X=0)=0$. Par récurrence immédiate, nous obtenons alors : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k)=0$

Ah oui... « Récurrence immédiate ». C'est une expression qu'il va falloir utiliser avec parcimonie, lorsque la récurrence sera vraiment évidente. Autrement dit, ça ne doit pas être du bluff : vous seriez parfaitement en mesure de le prouver - et facilement - si on vous le demandait, mais vous ne voyez pas l'intérêt de rédiger une récurrence complète pour si peu. Ce n'est donc pas un moyen de faire passer vos « intuitions » pour des assertions vraies, mais d'échapper à une démonstration formelle triviale (que, je le répète, vous seriez parfaitement en mesure de produire sur demande).

Ici, on voit rapidement que si, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $P(X=k)=0$, alors
$P(X=k+1) = \left(a + \frac{b}{k+1}\right) \times 0 = 0$ *(hérédité). D'où, si la propriété est vraie pour $k=0$ (initialisée), alors, par récurrence, elle le sera pour tout $k \in \mathbb{N}$*

X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k)=0$... Absurde
Euh... Ca devrait déjà vous choquer en soi (mais quelles valeurs une telle variable aléatoire pourrait-elle prendre, au juste ?), mais s'il vous fallait quelque chose de plus formel : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} 0 = 0$, *donc :* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 0$, *ce qui contredit le rappel*

en début d'énoncé.
En conclusion, $\boxed{P(X=0)\neq 0}$

2)a) *Comment parvenir à une telle expression avec une puissance et une factorielle ? Très probablement un raisonnement par récurrence, à partir de la relation multiplicative donnée entre $P(X=k)$ et $P(X=k-1)$ - que nous avons transformée en relation entre $P(X=k+1)$ et $P(X=k)$*
Commençons déjà par écrire cette relation dans le cas qui nous intéresse : $a=0$ (et $b>0$) :
$\forall k\in\mathbb{N},\ P(X=k+1)=\dfrac{b}{k+1}\ P(X=k)$
Montrons par récurrence : $\forall k\in\mathbb{N},\ P(X=k)=\dfrac{b^k}{k!}P(X=0)$

Initialisation : pour $k=0$: $\dfrac{b^0}{0!}P(X=0)=\dfrac{1}{1}\times P(X=0)=P(X=0)$

Hérédité : Supposons que pour un certain entier naturel k, $P(X=k)=\dfrac{b^k}{k!}P(X=0)$,
et montrons : $P(X=k+1)=\dfrac{b^{k+1}}{(k+1)!}P(X=0)$.
$P(X=k+1)=\dfrac{b}{k+1}P(X=k)=\dfrac{b}{k+1}\times\dfrac{b^k}{k!}P(X=0)$ par hypothèse de récurrence.
Or : $(k+1)\times k!=(k+1)!$ Donc : $P(X=k+1)=\dfrac{b^{k+1}}{(k+1)!}\times P(X=0)$

Voilà une hérédité pas spécialement difficile... Mais parler de « récurrence immédiate » ici eût été quelque peu présomptueux à votre niveau. Peut-être, à la rigueur, en deuxième année... Et encore, même à ce stade-là, je vous conseillerais de poser votre récurrence, afin d'éviter de vous tromper sur l'expression générale (si ce n'est pas l'énoncé qui vous la donne)

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure :
$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ P(X=k)=\dfrac{b^k}{k!}P(X=0)}$

2)b) *L'énoncé nous demande d'exprimer $P(X=0)$ en fonction de b, mais nous n'avons aucune information sur $P(X=0)$. En tous cas, pas directement...*

Nous savons : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}P(X=k)=1$. Autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{b^k}{k!}P(X=0)=1$
Et là, j'ai bien envie d'utiliser l'information : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}=e^x$ *(ici :* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{b^k}{k!}=e^b$*)*

Mais le $P(X=0)$ dans ma somme me dérange... Travaillons déjà pour n fixé, histoire de ne pas faire de bêtise, et passons ensuite à la limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} P(X=0) = P(X=0) \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!}$

$P(X=0)$ étant constante vis-à-vis de l'indice k, j'ai utilisé la linéarité de la somme. Encore une fois, si un petit rappel sur les sommes peut vous faire du bien, je vous renvoie aux remarques faites ici, et à ces vidéos.

Or, d'une part, nous savons : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} P(X=0) = 1$

D'autre part : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} = e^b$ puis, par produit de limites :

$\lim_{n\to+\infty} P(X=0) \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} = P(X=0)e^b$

Nous avons calculé séparément les limites lorsque n tend vers $+\infty$ de deux quantités égales pour tout n (elles ont donc nécessairement la même limite).
Par unicité de la limite : $P(X=0)e^b = 1$, et enfin : $\boxed{P(X=0) = e^{-b}}$
Nous avons donc montré : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = \frac{b^k}{k!} e^{-b}$. *On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre b.*

3) *Bon réflexe : commencer tout simplement par écrire cette relation en tenant compte du fait que $b = -2a$. Attention : au vu des nouvelles hypothèses, ce que nous avons établi à la question précédente est inutilisable.*
Pour tout entier naturel non nul k : $P(X=k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(X=k-1) = \left(a - \frac{2a}{k}\right) P(X=k-1)$
D'où : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = \left(\frac{ak-2a}{k}\right) P(X=k-1) = \frac{a(k-2)}{k} P(X=k-1)$

Il nous faut déterminer la loi de X, c'est-à-dire l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X, ainsi que les probabilités que X prenne chacune de ces valeurs. Mais... Attendez. Ce $k-2$...
Remarquons que pour $k=2$, la relation de Panjer donne : $P(X=2) = 0 \times P(X=1) = 0$
Et *(en nous inspirant de ce que nous avons fait en 1)*, par récurrence immédiate, nous obtenons : $\forall k \geq 2$, $P(X=k) = 0$.
Nous en déduisons donc : $X(\Omega) \subset \{0;1\}$. Autrement dit, les seules valeurs que X peut prendre sont 0 et 1 *(à ce stade, ça pourrait être 0 seulement ou 1 seulement, auquel cas*

X serait une variable aléatoire constante). Mais nous savons aussi, d'après l'énoncé : $P(X=0)\neq 0$. Donc 0 fait bien partie des valeurs prises par X. Et, d'après 1), $P(X=0)\neq 1$, donc 0 n'est pas la seule valeur prise par X. Autrement dit, X prend aussi la valeur 1 et : $X(\Omega)=\{0;1\}$. *Ah, mais je connais ce genre de variable aléatoire !*

X suit donc une loi de Bernoulli. *(Loi dont il nous reste à déterminer le paramètre)*

Le paramètre de cette loi est $p=P(X=1)$.

Nous savons par ailleurs : $P(X=1)=\dfrac{a(1-2)}{1}P(X=0)$ (relation de Panjer)

Autrement dit : $P(X=1)=-aP(X=0)$. *Mais on ne connaît pas $P(X=0)$...*

De plus : $P(X=0)+P(X=1)=1$. D'où : $P(X=0)-aP(X=0)=1$, puis : $P(X=0)(1-a)=1$

Oui, d'accord, on va diviser par $1-a$, mais pas avant d'avoir justifié qu'il n'est pas nul.

Or, $a<0$, donc $1-a>1$ et, en particulier : $1-a\neq 0$.

D'où : $P(X=0)=\dfrac{1}{1-a}$, et enfin : $P(X=1)=1-P(X=0)=1-\dfrac{1}{1-a}=\dfrac{1-a-1}{1-a}=-\dfrac{a}{1-a}$

En conclusion, X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p=-\dfrac{a}{1-a}$

4) *Il nous faut justifier que Z remplit bien les conditions données par l'énoncé pour vérifier une relation de Panjer.*

$Z(\Omega)=[\![0\,;n]\!]$ *(on peut noter ainsi l'ensemble des entiers de 0 à n)*

Et, pour tout $k\in[\![0\,;n]\!]$, $P(Z=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

En particulier : $P(Z=0)=\binom{n}{0}p^0(1-p)^{n-0}=(1-p)^n$, avec $1-p\neq 0$ (car $p\neq 1$)

Donc $P(Z=0)\neq 0$ *La première condition pour vérifier une relation de Panjer est respectée.*

Il faut maintenant exprimer, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $P(Z=k)$ en fonction de $P(Z=k-1)$. La difficulté réside ici dans le fait que nous ne savons pas qui jouera les rôles de a et b

Pour tout $k\in[\![1\,;n]\!]$, $P(Z=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ et $P(Z=k-1)=\binom{n}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-(k-1)}$

Autrement dit : $P(Z=k-1)=\binom{n}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}$.

Peut-être le quotient des deux pour y voir plus clair ?

$P(Z=k-1)\neq 0$ (car $p\neq 0$ et $1-p\neq 0$) donc : $\dfrac{P(Z=k)}{P(Z=k-1)}=\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}\times\dfrac{p}{1-p}$

Et il faudrait parvenir à une expression de la forme $a+\dfrac{b}{k}$, avec a et b qui ne dépendent pas de k (mais ils peuvent tout à fait dépendre de n...) Que faire ? Explicitons les coefficients binomiaux pour que des termes se simplifient :

$\forall k\in[\![1\,;n]\!]$, $\dfrac{P(Z=k)}{P(Z=k-1)}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\times\dfrac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!}\times\dfrac{p}{1-p}=\dfrac{n-k+1}{k}\times\dfrac{p}{1-p}$

Euh, il est où, notre $a+\dfrac{b}{k}$? Pour commencer, la constante multiplicative $\dfrac{p}{1-p}$ ne doit pas nous déranger...

Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\dfrac{P(Z=k)}{P(Z=k-1)} = \left(\dfrac{n+1}{k} - \dfrac{k}{k}\right) \times \dfrac{p}{1-p} = \dfrac{p}{1-p}\dfrac{n+1}{k} - \dfrac{p}{1-p}$

Par suite, en posant $a = -\dfrac{p}{1-p}$ et $b = \dfrac{(n+1)p}{1-p}$, on a bien $a < 1$ car $a < 0$ (car $0 < p < 1$), et :

$\forall k \in [\![1\,;n]\!]$, $\dfrac{P(Z=k)}{P(Z=k-1)} = a + \dfrac{b}{k}$

C'est-à-dire : $\forall k \in [\![1\,;n]\!]$, $P(Z=k) = \left(a+\dfrac{b}{k}\right) P(X=k-1)$

Du coup, on a fini, non ? Non. Relisez bien les conditions à remplir pour vérifier une relation de Panjer. Le diable se cache dans les détails.
L'égalité déjà montrée pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$ doit en fait être montrée pour tout $k \in \mathbb{N}^*$...

Nous savons déjà : $\forall k \in [\![1\,;n]\!]$, $P(Z=k) = \dfrac{p}{1-p}\left(-1+\dfrac{n+1}{k}\right)P(Z=k-1)$

Par ailleurs : $\forall k \geq n+1$, $P(Z=k) = 0$ *(Z suivant une loi binomiale de paramètres n et p)*

L'égalité montrée précédemment reste donc vraie pour $k = n+1$, puisque :

$P(Z=n+1) = 0$ d'une part, et $\dfrac{p}{1-p}\left(-1+\dfrac{n+1}{n+1}\right)P(Z=n) = 0$ d'autre part

(car $-1+\dfrac{n+1}{n+1} = -1+1 = 0$)

Enfin, l'égalité reste vraie pour $k > n+1$, puisque dans ce cas $P(Z=k) = P(Z=k-1) = 0$

En conclusion, Z vérifie bien une relation de Panjer.

Quelques rappels de calcul matriciel

Comme seuls ceux qui ont choisi « mathématiques expertes » en Terminale sont censés avoir déjà fait du calcul matriciel, voici qui fera office de rappel pour eux et d'introduction pour les autres, nécessaire pour aborder les exercices suivants. Cette introduction **n'est pas exhaustive** et se concentrera notamment sur les notions nécessaires pour aborder les exercices 19 et 20.
Vous pouvez aussi consulter cette playlist de vidéos courtes, série introductive sur le calcul matriciel qui reprend en grande partie les rappels ci-après.

Enfin, si vous estimez ne pas avoir besoin de ces rappels, vous pouvez attaquer directement les exercices ici.

Tailles et positions

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Une matrice réelle de taille $n \times p$ est un tableau de nombres qui comporte n lignes et p colonnes. Ces nombres sont appelés coefficients de la matrice.
Le coefficient situé à la i-ème ligne et j-ième colonne d'une matrice M sera noté $m_{i,j}$.

Exemples : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

M est une matrice de taille 3×3. N est une matrice de taille 3×2.
P est une matrice de taille 2×1. Q est une matrice de taille 1×4.
On note aussi : $M \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $N \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $P \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$
Par ailleurs, on peut aussi dire que P est une matrice colonne de taille 2, et que Q est une matrice ligne de taille 4.

Quelques coefficients : $m_{3,3} = 2$, $n_{1,2} = -1$, $p_{2,1} = \dfrac{1}{2}$ et $q_{1,4} = 1$

Lorsqu'une matrice a autant de lignes que de colonnes, on dit qu'elle est carrée (de taille n si elle a n lignes). Plus simplement que $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels se note aussi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans les exemples ci-dessus, M est une matrice carrée de taille 3. On peut noter : $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Egalité de deux matrices

Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont la même taille et que leurs coefficients (aux mêmes emplacements) sont deux à deux égaux.

Matrice identité

La matrice identité de taille n est la matrice dont les coefficients diagonaux (diagonale qui va d'en haut à gauche jusqu'en bas à droite) sont égaux à 1, les autres étant égaux à 0. On la note souvent I_n.

Par exemple : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ...

Matrice nulle

La matrice nulle $O_{n,p}$ est la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont égaux à 0. Par commodité, $O_{n,n}$ est notée O_n.

Par exemple : $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $O_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ...

Somme de matrices

On peut sommer deux matrices A et B de même taille.
Si A et B sont deux matrices de taille $n \times p$, la matrice $A+B$ est la matrice de taille $n \times p$ obtenue en sommant deux à deux les coefficients aux mêmes emplacements.

Exemple : si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $P = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$M+N = \begin{pmatrix} 1+1 & 0+2 & 1+0 \\ 0-1 & 1+3 & 0+4 \\ 0+5 & 0+0 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarquez que l'addition matricielle est commutative : lorsque l'addition est possible, on a toujours : $M+N = N+M$
Ici, on ne peut pas sommer M et P, ou N et P (pas les mêmes tailles)

Par ailleurs, pour toute matrice A de taille $n \times p$, $A + O_{n,p} = A$. On dit que $O_{n,p}$ est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Produit d'une matrice par un réel

On peut multiplier n'importe quelle matrice A par un réel k. La matrice kA est la matrice de même taille que A, obtenue en multipliant chaque coefficient de A par k.

Exemple : si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $-5M = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$

Produit de deux matrices

C'est plus compliqué que la somme... Il ne s'agit pas d'un simple produit terme à terme. Si A est une matrice de taille $n \times p$ et si B est une matrice de taille $p \times q$, on définit la matrice $A \times B$ (notée aussi AB) ainsi : $C = A \times B$ est la matrice de taille $n \times q$ telle que, pour tous entiers i et j vérifiant $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq q$: $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$

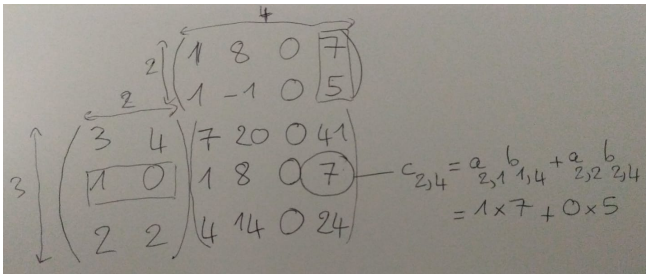
Autrement dit : $c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \ldots + a_{i,p}b_{p,j}$

Pour obtenir le coefficient $c_{i,j}$, on prend la i-ème ligne de A et la j-ième colonne de B. On effectue alors, pour tout entier k entre 1 et p, le produit du k-ième terme de cette i-ème ligne de A avec le k-ième terme de cette j-ème ligne de B, et on somme ces p produits. Un exemple nous permettra d'y voir plus clair :

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (de taille 3×2) et $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (de taille 2×4),

$C = A \times B$ est une matrice de taille 3×4,

et $C = \begin{pmatrix} 3\times1+4\times1 & 3\times8+4\times(-1) & 3\times0+4\times0 & 3\times7+4\times5 \\ 1\times1+0\times1 & 1\times8+0\times(-1) & 1\times0+0\times0 & 1\times7+0\times5 \\ 2\times1+2\times1 & 2\times8+2\times(-1) & 2\times0+2\times0 & 2\times7+2\times5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 0 & 41 \\ 1 & 8 & 0 & 7 \\ 4 & 14 & 0 & 24 \end{pmatrix}$



Disposition plus simple pour le calcul, et détail du calcul de $c_{2,4}$

Attention : le produit matriciel $A \times B$ n'est possible que lorsque le nombre de colonnes de A est égal aux lignes de B.
Cela implique notamment que le produit matriciel n'est pas commutatif : on n'a pas en général $A \times B = B \times A$ (puisqu'en général, l'un peut être défini sans que l'autre ne le soit).

Dans le cas où A et B sont deux matrices carrées de même taille, les produits $A \times B$ et $B \times A$ sont bien définis, mais pas nécessairement égaux. Lorsque $A \times B = B \times A$, on dit que les matrices A et B commutent.

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 1+4\times 1 & 3\times 8+4\times(-1) \\ 1\times 1+0\times 1 & 1\times 8+0\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 20 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 3+8\times 1 & 1\times 4+8\times 0 \\ 1\times 3+(-1)\times 1 & 1\times 4+(-1)\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

On remarque : $A \times B \neq B \times A$

Pour toute matrice carrée A de taille n, on a $A \times I_n = I_n \times A = A$
On dit que I_n est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Par ailleurs, pour toute matrice A de taille $n \times p$, $A \times O_{p,q} = O_{n,q}$ et $O_{m,n}A = O_{m,p}$

Cas particulier du produit d'une matrice carrée par une matrice colonne

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},\ AX = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times(-3)+4\times 5+1\times 0 \\ 1\times(-3)+0\times 5+2\times 0 \\ -1\times(-3)-2\times 5+6\times 0 \end{pmatrix}$$

Donc $AX = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$

Quelques propriétés calculatoires

Pour tous réels a et b, pour toutes matrices M et N de même taille :
$(a+b)M = aM + bM \qquad a(bM) = (ab)M = abM \qquad a(M+N) = aM + aN$

Pour toutes matrices A, B et C tels que les produits matriciels soient possibles :

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (qu'on peut donc écrire sans ambiguïté $A \times B \times C$ ou ABC)
  C'est ce qu'on appelle l'associativité du produit matriciel.
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
  C'est ce qu'on appelle la distributivité du produit sur l'addition.

L'intégrité tombe à l'eau

Notez qu'un produit de deux matrices peut être nul sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle. Voyez plutôt :

si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $A \times B = \begin{pmatrix} 1\times 0 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ 0 \times 0 + 0 \times 0 & 0 \times 0 + 0 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$

Et pourtant, ni A ni B n'est nulle...
La jolie propriété « un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul » que vous avez sur $\mathbb{R}$ (et aussi sur $\mathbb{C}$ si vous avez vu les nombres complexes), qui vous accompagne depuis le collège, et qui fait de $\mathbb{R}$ ce que l'on appelle - frimons un peu - un anneau intègre, tombe à l'eau pour les matrices...

Par contre, il est tout à fait exact d'affirmer que le produit λM entre un réel λ et une matrice M de taille $n \times p$ est nul si et seulement si $\lambda = 0$ ou $M = O_{n,p}$

Puissances d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A une matrice carrée de taille n.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La puissance k-ième de A est $A^k = A \times A \times ... \times A$ (où A apparaît k fois).
Et, par convention : $A^0 = I_n$. (de même que pour tout réel a, $a^0 = 1$)

Remarquez en particulier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_n^k = I_n$

Inversibilité et inverse d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit M une matrice carrée de taille n.
M est dite inversible lorsqu'il existe une matrice N carrée de taille n telle que :
$M \times N = N \times M = I_n$.
N est alors appelée l'inverse de M, et on note $N = M^{-1}$
(En fait, l'une des deux égalités $M \times N = I_n$ ou $N \times M = I_n$ suffit et implique l'autre)

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 0 - 1\times(-1) & 3\times 1 - 1\times 3 \\ 1\times 0 + 0\times(-1) & 1\times 1 + 0\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

A est donc inversible et $A^{-1} = B$ (de même, B est inversible et $B^{-1} = A$)

Les matrices carrées de taille n ne sont pas toutes inversibles.

Lorsqu'une matrice carrée A est inversible, son inverse A^{-1} est unique.

Lorsqu'une matrice carrée A est inversible d'inverse A^{-1}, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^{-k} est la matrice définie ainsi : $A^{-k} = (A^{-1})^k$
Lorsque A est inversible, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k l'est aussi, et $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k = A^{-k}$

Exercice 19

Nouvelles pour certains mais pleuvent en averse :
Matrices, produits, noyaux et du calcul d'inverse.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min) (***) *d'après HEC 2012 ECS*

Soit m un réel non nul, et soit M la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

1) Déterminer l'ensemble des matrices colonnes $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telles que $MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1} *On pourra calculer M^2...*

Remarques sur l'énoncé :

Vous pouvez raisonnablement ajouter une étoile à la difficulté de l'exercice si vous n'aviez jamais fait de calcul matriciel auparavant.

Attention à la notation : ici, l'énoncé choisit de noter I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ (et non I_3)

L'ensemble à déterminer dans la question 1) se note Ker M. On dit que c'est le noyau de la matrice M.

Correction de l'exercice 19 :

1) *Ecrivons ce que ça donne avec le produit matriciel, puis traduisons l'égalité des matrices en égalité des coefficient :*

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z \\ mx + \frac{1}{m}z \\ m^2x + my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z &= 0 \\ mx + \frac{1}{m}z &= 0 \\ m^2x + my &= 0 \end{cases}$$

Comment résoudre ce système (d'inconnues x, y et z) ?

m étant non nul, ce système est équivalent à : $\begin{cases} my + z &= 0 \\ m^2x + z &= 0 \\ m^2x + my &= 0 \end{cases}$

On a multiplié la première ligne par m^2 et la deuxième par m

$$\text{Donc : } MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} my &= -z \\ m^2x &= -z \\ -z - z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} my &= -z \\ m^2x &= -z \\ -2z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= -\frac{1}{m}z \\ x &= -\frac{1}{m^2}z \\ z &= 0 \end{cases}$$

$$\text{Finalement : } MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

En conclusion, l'unique matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est la matrice colonne nulle : $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) *Suivons donc l'indication de l'énoncé...*

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0\times 0+(1/m)m+(1/m^2)m^2 & 0\times(1/m)+(1/m)\times 0+(1/m^2)m & 0\times(1/m^2)+(1/m)(1/m)+(1/m^2)\times 0 \\ m\times 0+0\times m+(1/m)m^2 & m\times(1/m)+0\times 0+(1/m)m & m\times(1/m^2)+0\times(1/m)+(1/m)\times 0 \\ m^2\times 0+m\times m+0\times m^2 & m^2\times(1/m)+m\times 0+0\times m & m^2\times(1/m^2)+m\times(1/m)+0\times 0 \end{pmatrix}$$

Vous n'êtes évidemment pas censés faire figurer un tel calcul sur vos copies. Je le fais juste pour que vous puissiez vérifier votre calcul matriciel. De rien.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 2 & 1/m \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix}$$ *Oui, et alors ?*

On remarque : $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = M + 2I$

On a donc : $M^2 = M + 2I$

Et là, on va pouvoir exhiber facilement une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AM = MA = I$

D'où : $M^2 - M = 2I$. Autrement dit, $M \times (M - I) = 2I$ et $(M - I) \times M = 2I$

Enfin : $M \times \frac{1}{2}(M - I) = I$ et $\frac{1}{2}(M - I) \times M = I$

Cela prouve que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1/m & 1/m^2 \\ m & -1 & 1/m \\ m^2 & m & -1 \end{pmatrix}$

En fait, lorsque A et B sont deux matrices carrées de taille n, l'une des deux égalités $A \times B = I_n$ ou $B \times A = I_n$ suffit pour conclure que A et B sont inverses l'une de l'autre.

Exercice 20

Plus rapide que nos attentes
pour peu qu'il y ait des nilpotentes...

Énoncé : (temps conseillé : 40 min) (***) *d'après EDHEC 2019 ECE*

Soit A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et O_3 la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$
Au cours de l'exercice, on pourra librement utiliser la formule du binôme de Newton : pour toutes matrices carrées M_1 et M_2 de même taille, si M_1 et M_2 commutent (c'est-à-dire si $M_1M_2 = M_2M_1$), alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(M_1+M_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_1^k M_2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_1^{n-k} M_2^k$

1) Déterminer $(A-I)^2$. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.

2) On pose $N = A - I$. Exprimer, pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis comme combinaison linéaire de I et A.

3) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$. Est-elle valable pour tout entier relatif n ?

Remarques sur l'énoncé :

Ici, l'énoncé fait le choix d'adopter une notation spécifique pour la matrice nulle (pour bien faire la distinction avec le réel 0, étant donné que vous êtes encore novice en calul matriciel). Mais, dans d'autres situations, il arrive souvent de noter 0 la matrice nulle, auquel cas il faut faire attention à ce que veut dire 0 selon le contexte (un réel ? une matrice ? un vecteur ?).

Exprimer une matrice A comme combinaison linéaire de deux matrices B et C, c'est réussir à écrire $A = \alpha B + \beta C$, avec α et β deux réels.

Enfin, la formule du binôme de Newton donnée par l'énoncé fait figurer deux sommes. On peut vérifier qu'elles sont égales par changement d'indice $j = n - k$ (plus de détails dans cette vidéo de la playlist sur le signe $\sum$) en rappelant $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$. Par ailleurs, il est tout à fait normal que l'on puisse intervertir M_1 et M_2 comme c'est le cas entre les deux sommes, puisque $(M_1+M_2)^n = (M_2+M_1)^n$.

Correction de l'exercice 20 :

1) $A-I=\begin{pmatrix}0-1 & 1 & 1\\ -2 & 3-1 & 2\\ 1 & -1 & 0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ et le calcul donne $\boxed{(A-I)^2=O_3}$

Mais quel rapport avec l'inversibilité de A ? Il faudrait justifier l'existence d'une matrice B (et pourquoi pas l'exhiber) telle que $AB=I$ (cf remarque finale de l'exercice précédent). Essayons d'écrire $(A-I)^2$ autrement :

$$(A-I)^2=(A-I)(A-I)=A^2-AI-IA+I^2=A^2-2A+I$$

Remarquez ici que comme A et I commutent, on a l'identité remarquable :
$(A-I)^2=A^2-2AI+I^2$
Lorsque deux matrices carrées de même taille M_1 et M_2 commutent (c'est-à-dire lorsque $M_1M_2=M_2M_1$), les identités remarquables que vous connaissiez sur l'ensemble des réels (voire des complexes si vous en avez fait) restent encore valables pour ces matrices. Autrement dit :
$(M_1+M_2)^2=M_1^2+2M_1M_2+M_2^2$
$(M_1-M_2)^2=M_1^2-2M_1M_2+M_2^2$
$(M_1+M_2)(M_1-M_2)=M_1^2-M_2^2$
En effet, par exemple pour la première formule : $(M_1+M_2)^2=M_1^2+M_1M_2+M_2M_1+M_2^2$ en général, et ça fait $M_1^2+2M_1M_2+M_2^2$ lorsque $M_1M_2=M_2M_1$
Remarquez aussi que cette formule est un cas particulier de la formule du binôme de Newton donnée par l'énoncé (cas particulier $n=2$). Trêve de bavardages, et reprenons le cours de la correction...

Nous avons donc : $A^2-2A+I=O_3$. *Et si on isolait I ?*
D'où : $A^2-2A=-I$, ou encore $-A^2+2A=I$, c'est-à-dire, en factorisant par A à gauche :
$A(-A+2I)=I$
Attention à ne pas tomber dans le piège d'écrire : $-A^2+2A=A(-A+2)$. $-A+2$ est une somme interdite entre une matrice carrée de taille 3 et un réel (on ne peut faire des sommes/différences de matrices qu'entre matrices de même taille).
Cela prouve que $\boxed{A \text{ est inversible, d'inverse } A^{-1}=-A+2I}$

2) *Remarquez : $N^2=(A-I)^2=O_3$. On dit d'une telle matrice (dont une certaine puis-*

sance est égale à la matrice nulle) qu'elle est nilpotente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (N+I)^n$, avec $NI = IN$, la matrice identité I commutant avec toute les autres (carrées de même taille). Nous pouvons donc utiliser la formule du binôme de Newton donnée par l'énoncé : $A^n = (N+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \times I = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k$

On a choisi ici de mettre la puissance k sur N et la puissance $n-k$ (la plus « compliquée ») sur I, parce que I^k et I^{n-k}, ça fait I dans tous les cas... (Dès lors, autant nous simplifier la vie sur le N)
Mais attendez, N^k... On sait que $N^2 = O_3$. Qu'est-ce que cela implique sur les autres puissances de N ?
$N^2 = O_3$ donc, par récurrence immédiate : $\forall k \geq 2,\ N^k = O_3$.

Vous voyez cette petite formule « par récurrence immédiate », à l'apparence parfaitement anodine ? Il va falloir l'utiliser avec prudence et parcimonie l'année prochaine. Elle veut dire, en quelque sorte : « ça se démontre par récurrence et puis vous voyez bien que l'hérédité est triviale ». Elle a sa place par exemple dans la situation où on a une suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$, et qu'il faut justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Dire « par récurrence immédiate », c'est montrer au lecteur (plus souvent un correcteur qu'un fan...) qu'on a compris que le raisonnement qui se cache derrière le résultat jugé immédiat est une récurrence. « Mais comme elle est particulièrement facile, faut-il vraiment que je vous ennuie à la rédiger ? »

Rapidement, s'il fallait faire l'esquisse de la récurrence qui nous occupe : $N^2 = O_3$ (initialisation) et, si on suppose, pour un certain $k \geq 2$, $N^k = O_3$, alors :
$N^{k+1} = N^k \times N = O_3 \times N = O_3$ *(hérédité).*
Conclusion : $\forall k \geq 2,\ N^k = O_3$
Donc, pour tout $n \geq 2$, $A^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} O_3 = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k$
Autrement dit : $\forall n \geq 2,\ A^n = \binom{n}{0} N^0 + nN^1 = I + nN$

Attention : on a montré que l'expression obtenue était valable pour $n \geq 2$. Restent à traiter les cas $n = 0$ et $n = 1$.
Par ailleurs, cette formule est encore valable pour $n = 0$ (car $A^0 = I$ et $I + 0 \times N = I$) et

pour $n = 1$ (car $A^1 = A$ et $I + 1 \times N = I + N = A$).

Il se trouve qu'ici, la formule obtenue pour $n \geq 2$ s'étend bien à $n = 0$ et $n = 1$. Ca aurait pu ne pas être le cas. On aurait très bien pu se retrouver avec des formules spécifiques à ces rangs.

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = I + nN}$

Nous avons réussi à exprimer A^n comme combinaison linéaire de I et N. Reste à l'exprimer comme combinaison linéaire de I et A. Il suffit de remplacer N par son expression en fonction de A.
D'où : $A^n = I + n(A - I)$ et enfin : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (1-n)I + nA}$

3) *Nous avons déjà établi en 1) que A était inversible, ainsi que l'expression de son inverse. Il s'agit ici simplement de vérifier que $A^{-1} = \big(1-(-1)\big)I - A = 2I - A$*

D'après 1), $A^{-1} = 2I - A$. Et $\big(1-(-1)\big)I + (-1)A = 2I - A$. On a bien : $A^{-1} = \big(1-(-1)\big)I - A$
$\boxed{\text{L'expression obtenue en 2) est bien valable pour } n = -1}$

L'est-elle pour tout entier relatif ? J'ai le pressentiment que non, sinon l'énoncé m'aurait probablement demandé de le prouver (attention toutefois aux énoncés qui adoptent ce genre de tournure justement pour nous piéger...)
$A^{-2} = (A^{-1})^2 = (2I - A)^2 = 4I^2 - 4I \times A + A^2$ (car A et I commutent).
D'où : $A^{-2} = 4I - 4A + A^2$. Et, d'après 2), $A^2 = (1-2)I + 2A = -I + 2A$.
Donc : $A^{-2} = 4I - 4A - I + 2A = 3I - 2A$. Et $(1-(-2))I + (-2)A = 3I - 2A$
Ah zut alors ! Ca a l'air de marcher en fait... S'agirait-il de montrer effectivement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (1-n)I + nA$? C'est déjà fait pour les n entiers naturels. Reste donc à le montrer pour les entiers strictement négatifs. Autrement dit, il faudrait montrer :
$\forall n \in \mathbb{N},\ A^{-n} = (1+n)I - nA$
Mais on ne va pas refaire tout ce qu'on a fait en 2) si ? Non, on va justement s'appuyer sur ce qu'on a fait en 2)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{-n} = (A^n)^{-1}$. Montrons que A^n a pour inverse $(1+n)I - nA$.
Autrement dit, montrons : $A^n \times \big((1+n)I - nA\big) = I$
Et comme on connaît l'expression de A^n en fonction de A et I...

$A^n \times \big((1+n)I - nA\big) = \big((1-n)I + nA\big) \times \big((1+n)I - nA\big)$
Attention à ne pas voir une identité remarquable là où il n'y en a pas...

Donc $A^n \times \big((1+n)I - nA\big) = (1-n)(1+n)I^2 - (1-n)nIA + n(1+n)AI - n^2A^2$
Là,je veux bien que l'on voie une identité remarquable...

Il s'ensuit que : $A^n \times \big((1+n)I - nA\big) = (1-n^2)I - (1-n^2)A + (n+n^2)A - n^2(-I+2A)$
On a remplacé A^2 par son expression en fonction de A et I obtenue précédemment

Enfin : $A^n \times \big((1+n)I - nA\big) = (1-n^2+n^2)I + (n^2-1+n+n^2-2n^2)A = I$

Nous venons donc de montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(A^n)^{-1} = (1+n)I - nA$
Autrement dit, $A^{-n} = \big(1-(-n)\big)I + (-n)A$
L'expression $A^n = (1-n)I + nA$, précédemment montrée pour tout $n \in \mathbb{N}$, est donc aussi valable pour $-n$. C'est-à-dire qu'elle est aussi valable pour tout entier négatif.

En conclusion, l'expression obtenue en 2) est valable pour tout entier relatif n.