Vers le supérieur

Version prépa BCPST

Ayoub Hajlaoui

Avant-propos

Ce document comporte une vingtaine de problèmes mathématiques corrigés, tous extraits de sujets de concours de fin de CPGE (concours d'entrée aux grandes écoles), en filière BCPST. Ils sont remaniés de sorte que le programme de Terminale (spécialité) est le seul prérequis pour en venir à bout. À cette fin, des questions intermédiaires ont parfois été ajoutées au sujet original. Les notions, définitions ou résultats qui pourraient manquer à l'élève pour parvenir à la résolution lui sont donnés en hypothèse, ainsi que des indications supplémentaires et remarques utiles.

La première originalité de ce document réside donc dans sa nature de pont entre le rivage du lycée et celui des concours. En se concentrant principalement sur des notions vues par l'élève l'an passé (suites, fonctions, intégrales, entre autres), il lui propose de les mobiliser pour faire tomber des questions de sujets de concours, montrant ainsi de manière pratique l'intérêt de bien maîtriser ces notions, de les voir comme des alliées de taille qui l'épauleront tout au long de la prépa, plutôt que de présenter leur révision comme une corvée estivale. En outre, de par les nouveautés introduites ça et là pour affiner ces dernières, de par un grand nombre de questions abordant des notions générales de raisonnement et d'ensembles, ce recueil donne au lycéen un avant-goût de la glorieuse chevauchée qui l'attend, en lui mettant le pied à l'étrier. Il lui rappellera certaines de ses errances de l'an passé, tout en le préparant à l'année à venir - sans prétendre constituer une liste exhaustive de ce qui y sera vu.

Si ces exercices ne nécessitent pas d'autre prérequis que le programme de Terminale, ils s'avéreront, en pratique, difficiles pour un élève au sortir du lycée. Le degré d'atsuce nécessaire, les idées qu'il faut avoir pour faire tomber telle ou telle question, détonnent avec la plupart des exercices rencontrés en Terminale, dont les pistes étaient en général plus claires, et les résolutions plus « téléphonées ».

C'est ici qu'intervient la seconde originalité de ce document par rapport à d'autres recueils d'exercices corrigés, originalité qui constitue son atout majeur : la correction, très détaillée, insiste autant que possible sur « le pourquoi de l'idée » , la question de l'apparition de la première étincelle : à quoi telle situation nous fait-elle penser ? pourquoi est-il judicieux d'emprunter telle voie, de penser à telle astuce à ce moment-là plutôt qu'à un autre ? quel écueil faut-il éviter et comment voir que c'est un piège ? Vous trouverez de telles considérations en italique, en parallèle de la correction à proprement parler. Autant de didascalies rythmant la pièce de théâtre mathématique aux premières loges de laquelle vous êtes convié. Lever de rideau.

L'auteur en quelques mots

Lauréat de l'agrégation externe de mathématiques en 2020 (64 ème sur 323 admis et 3069 inscrits), docteur en mathématiques appliquées (université Paris VI), diplômé de l'école d'ingénieurs des Mines de Nancy et du master recherche MVA (Maths Vision Apprentissage) de l'ENS Cachan, je donne des cours de mathématiques (particuliers et en groupe, niveau lycée à prépa/L3) depuis 2008. Je suis également colleur en MPSI au lycée Charlemagne (Paris), lycée où j'ai moi-même effectué mes années de prépa MPSI/MP.

Parallèlement, je rédige des exercices de mathématiques (principalement niveau prépa et Terminale) ainsi que des corrigés particulièrement détaillés, que vous pouvez consulter librement sur `www.ayoub-et-les-maths.com`. J'y explique à l'élève non seulement le cheminement, mais aussi et surtout pourquoi il doit avoir telle idée à tel moment, pourquoi telle autre idée n'est pas appropriée, quel piège il faut éviter ; cela, dans l'optique de l'entraîner au raisonnement réel, et non à la mimique maladroite qui est l'apanage du plus grand nombre.

Sur ma chaîne youtube « Ayoub et les maths », vous trouverez également bon nombre de vidéos d'exercices corrigés niveau Terminale et prépa (parmi ceux que j'ai donnés en colle notamment), des séries thématiques pour vous familiariser avec des notions spécifiques comme le signe somme, le calcul matriciel, la valeur absolue, ainsi que des conseils plus généraux pour vous améliorer en mathématiques. Et même, une série dénommée « Où est l'arnaque » : ce sont des exercices corrigés avec des erreurs de raisonnement volontaires - révélées en fin de vidéo, bien sûr - pour tester votre vigilance mathématique...

Table des matières

Introduction **page 1**

Exercice 1 Modèles d'évolution d'une population (**) page 3
Fonctions, suites Agro-Véto 2024 MMI

Exercice 2 Nb de points fixes en fonction d'un paramètre (***) page 10
Fonctions Agro-Véto 2023 CR

Exercice 3 Inégalités logarithmiques (**) page 15
Fonctions Concours G2E 2020

Exercice 4 Suite implicite, logarithme, limites (***) page 18
Fonctions, suites Oral Agro-Véto 2022

Exercice 5 Suites implicites (encore), log, équivalents (****) page 23
Fonctions, suites Oral Agro-Véto 2018

Exercice 6 Equation différentielle à coeffs non constants (**) page 28
Fonctions, primitives, équations différentielles Concours G2E 2021

Exercice 7 Intégrales et quotients (**) page 33
Primitives, équations différentielles, intégrales ENS 2018 BCPST

Exercice 8 Sommes de Riemann, convergence de suites (***) page 36
Suites, intégrales Agro-Véto 2009 Maths A

Exercice 9 Arccos, dérivée et intégrale (***) page 41
Fonctions, trigonométrie, intégrales Concours G2E 2022

Exercice 10 Limites d'intégrales, dérivées n-ièmes de cos (***) page 46
Limites d'intégrales, dérivées n-ièmes de cos Agro-Véto 2013 Maths A

Exercice 11 Dynamique de deux populations (****) page 53
Fonctions, équations différentielles, primitives, intégrales ENS 2024 BCPST

Exercice 12 Comparaison somme intégrale, équivalents (****) page 60
Fonctions, suites, primitives, intégrales Agro-Véto 2016 CR

Exercice 13 Jeu sur des coefficients de polynômes (****) page 66
Fonctions, primitives, intégrales, polynômes ENS 2018 BCPST

Exercice 14 Salade de coefficients binomiaux (****) page 73
Suites, dénombrement Agro-Véto 2024 CR

Exercice 15 Quel est l'avion le plus sûr ? (**) page 78
Fonctions, probabilités, dénombrement Concours G2E 2014

Exercice 16 Convexité, variables aléatoires, espérance (****) page 82
Fonctions, probabilités ENS 2021 BCPST

Exercice 17 Urne, boules, probabilités composées (***) page 89
Probabilités, dénombrement Agro-Véto 2022 CR

Exercice 18 Probabilités, transformation d'Abel (***) page 94
Suites, probabilités Agro-Véto 2009 Maths B

Quelques rappels de calcul matriciel page 97

Exercice 19 Matrices pseudo-inversibles (**) page 104
Calcul et raisonnement matriciel Agro-Véto 2016 CR

Exercice 20 Valeurs propres et vecteurs propres (***) page 107
Calcul et raisonnement matriciel Concours G2E 2023

Introduction

Les problèmes présentés dans ce document sont de longueur et difficulté variables. Une évaluation de cette dernière, subjective, est précisée à titre indicatif en début de chaque problème :
(*) facile (**) moyen (***) difficile (****) particulièrement difficile
J'insiste sur le caractère subjectif de cette évaluation. Si elle s'appuie sur des paramètres tels la complexité des notions mises en oeuvre et le fait que les astuces à voir pour résoudre les questions de chaque exercice soient plus ou moins cachées, plus ou moins évidentes, l'observation empirique l'influence grandement : une sorte de moyenne vague de la difficulté ressentie par les nombreux élèves que j'ai pu côtoyer (cours particuliers, TD, colles...) face à un genre de question ou d'enchaînement de questions. Il s'agit aussi, pour moi, de comparer, en termes de difficulté, les exercices de ce document les uns aux autres.
Pas de panique, donc, si vous butez face à un exercice classé comme « moyen » ou « facile » . Faites de votre mieux dans le temps imparti, puis lisez attentivement la correction.

L'annale d'origine de chaque problème est indiquée. Dans le cas du concours Agro-Véto, les initiales CR et MMI désigneront respectivement les épreuves de « calcul et raisonnement » et de « modélisation mathématique et informatique ».

Pour chaque problème, un temps de travail préconisé est indiqué. Il ne correspond pas forcément au temps au bout duquel l'exercice doit être résolu, mais plutôt au temps de recherche au bout duquel il devient raisonnable de commencer à regarder la correction. Il peut en effet être pertinent de vous imposer de réfléchir en temps limité, pour vous entraîner aux conditions d'examen. Mais si tel énoncé vous intrigue particulièrement, si vous vous sentez prêt de le faire tomber, si vous aimeriez en venir à bout (peut-être pour des raisons de fierté personnelle, peut-être pas), quitte à lui consacrer plus de temps que les autres, n'hésitez surtout pas. C'est en jouant de ces deux modes temporels que l'on peut s'améliorer durablement en mathématiques. Une telle idée est développée plus en détail dans cet article.

Chaque énoncé est suivi de « remarques sur l'énoncé ». Il ne s'agit nécessairement d'indications sur la résolution, mais plutôt de précisions sur les notations introduites par l'énoncé, ou de rappels de concepts mathématiques utiles.

La correction à proprement parler est en caractères normaux. Les passages en italique correspondent à des commentaires sur cette correction. Principalement, le fameux « pourquoi de l'idée » , cette substance fugace décrite tant bien que mal dans l'avant-propos. Mais aussi, par moments, des réflexions sur d'autres méthodes que celle choisie dans la correction, des analogies avec d'autres situations, des discussions sur telle ou telle erreur courante commise par les élèves à tel endroit. Plus rarement, deux ou trois confidences sur mes choix éditoriaux : pourquoi ai-je reformulé ainsi la question origi-

nellement présente dans le sujet ? Pourquoi ai-je ajouté telle question ? Vous mettre à la place du « concepteur » du sujet (même si le titre qui me conviendrait le mieux ici serait celui de reformulateur), tenter d'en comprendre la cohérence, vous attacher aux liens entre les questions et à leur fil conducteur peut vous aider à vous sortir du labyrinthe.

Place, maintenant, à de brèves considérations d'ordre général, qui seront complétées au besoin par les remarques sur chaque énoncé. Votre aventure mathématique dans le supérieur consistera en grande partie en la manipulation d'**assertions** . Ce sont des phrases syntaxiquement correctes (autrement dit, qui ont du sens) et qui sont soit vraies, soit fausses.
Comment ça, « soit vraies, soit fausses » ? N'est-ce pas trop général comme définition ? Toute phrase ne deviendrait-elle pas une assertion ?
Certainement pas, voyez plutôt :

- A : « $3^2 + 12 \times 7$ » n'est pas une assertion, car dire qu'elle serait vraie ou fausse n'aurait aucun sens.
- B : « $\forall x + \mathbb{R},\ x^2 \leq 2$ » n'est pas une assertion, car elle n'est pas syntaxiquement correcte.
- C : « $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 > 0$ » est une assertion. C'est même une assertion vraie.
- D : « $\exists x \in \mathbb{R},\ e^x \leq 0$ » est une assertion. C'est une assertion fausse.
- D : « $x + 7 \geq 2$ » est une assertion. C'est une assertion dont la véracité dépend du choix du paramètre x. Pour l'anecdote, une telle assertion est appelée un prédicat.

Rappelons la signification des symboles $\forall$ et $\exists$:

- $\forall$ signifie : « pour tout », ou encore « quel que soit ». L'assertion C se lit donc : « pour tout réel x non nul, $x^2 > 0$ ». Ou encore, de manière équivalente : « quel que soit le réel x non nul, $x^2 > 0$ »

- $\exists$ signifie « il existe ». L'assertion D se lit donc : « il existe un réel x tel que $e^x \leq 0$ » Voyez comment j'ai intercalé un « tel que » à la place de la virgule, pour que la phrase ait du sens en français.

Si A et B sont deux assertions mathématiques, « $A \Longrightarrow B$ » (se lit « A implique B ») veut dire que si A est vrai, alors B est vrai.
Autrement dit, A est une condition suffisante à B.
Il suffit que A soit vrai pour que B soit vrai.
Autrement dit, B est une condition nécessaire à A.
A ne peut pas être vrai sans que B ne soit vrai.

« $A \Longleftrightarrow B$ » (se lit « A équivaut à B » ou « A est équivalent à B ») veut dire que nous avons à la fois $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$. Autrement dit : A est vrai si et seulement si B est vrai.

La négation de « $A \Longrightarrow B$ » , notée non$(A \Longrightarrow B)$, est « A et non(B) ».
Autrement dit, A n'entraîne pas B puisque A est réalisé mais pas B

Exercice 1

Modélisons à coups de suites et fonctions
cette espèce inconnue qui fuit son extinction.

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure 20 min) (**) *d'après Agro-Véto 2024 MMI*

On s'intéresse à des modèles d'évolution d'une population. Dans chacun des modèles, une suite (v_n) modélise le nombre d'individus dans la population à la génération n. On dit qu'il y a extinction si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

1) Pour commencer, on propose le modèle suivant : chaque individu a un nombre de descendants $q > 0$, de telle sorte que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = qv_n$. On suppose que $v_0 > 0$. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n et donner une condition d'extinction.

2) On propose un nouveau modèle. On définit une suite (v_n) par :
$v_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}v_n\left(\frac{S - v_n}{S}\right)$ où $S \in]0\,;+\infty[$ est une constante du problème.
a) Déterminer une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f(v_n)$. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
b) On suppose maintenant que $v_0 \in]0\ ;\ S]$. Montrer que (v_n) est croissante et majorée par S. En déduire qu'elle converge et donner sa limite.

3) On souhaite affiner le modèle en modifiant la fonction f. Désormais :
$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}v_n\left(\frac{S - v_n}{S}\right)\left(\frac{v_n - A}{S}\right)$, où $A \in]0\ ;\ S[$ est fixé.
a) Identifier f. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[0\ ;\ S]$.
b) Dans cette question, $v_0 \in]0\ ;\ A[$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in]0\ ;\ A[$, puis que (v_n) est décroissante. En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.
c) Réaliser une étude analogue lorsque $v_0 \in]A\ ;\ S]$. Que se passe-t-il si $v_0 = A$?
d) Donner une interprétation des quantités A et S dans le modèle de la question 3.

Remarques sur l'énoncé :

Rappelons la signification de ces symboles, mis en jeu dans cet énoncé et la correction :

- $\forall$ signifie : « pour tout », ou encore « quel que soit ».
- $\in$ signifie « appartient à ».
- $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des réels positifs. C'est donc $[0;+\infty[$

Correction de l'exercice 1 :

1) Dans ce modèle, (v_n) est une suite géométrique de raison q. Nous savons donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n$ *Bon, ça commence assez gentiment.*
v_0 étant strictement positif, il y a trois situations possibles pour la limite de (v_n) : si $q > 1$, (v_n) diverge vers $+\infty$. Si $q = 1$, (v_n) est constante et converge donc vers v_0. Enfin, si $0 < q < 1$, (v_n) converge vers 0. Il y a donc extinction dans ce cas, et dans ce cas uniquement. Autrement dit, il y a extinction si et seulement si $q \in]0\,;1[$.

L'énoncé parle de « condition d'extinction » sans plus de précisions. Condition nécessaire ? Condition suffisante ? Vu la formulation, il semblerait que le correcteur puisse se contenter d'une condition suffisante : une condition qui, si elle est remplie, entraîne qu'il y a extinction. Ici, si $q \in]0\,;1[$, alors il y a bien extinction. Mais la condition $q \in]0\,;1[$ est aussi une condition nécessaire pour qu'il y ait extinction : s'il y a extinction, alors nécessairement, $q \in]0\,;1[$ (car, comme vu plus haut, aucune des autres valeurs possibles pour q ne permet que (v_n) converge vers 0). Cette condition $q \in]0\,;1[$ est donc une condition nécessaire et suffisante d'extinction, ce qui m'a permis d'écrire ce « si et seulement si ».

2)a) Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = f(v_n)$, où f est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{1}{2}x\left(\frac{S-x}{S}\right) = x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2S}x^2 = -\frac{1}{2S}x^2 + \frac{3}{2}x$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car polynomiale.
Oui, f est même dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc a fortiori sur $\mathbb{R}_+$, intervalle sur lequel sa dérivabilité m'intéresse ici.
Pour tout réel positif x, $f'(x) = -\frac{2}{2S}x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{S}x + \frac{3}{2}$
$\forall x \in \mathbb{R}_+ : f'(x) \geq 0 \iff -\frac{1}{S}x + \frac{3}{2} \geq 0 \iff \frac{1}{S}x \leq \frac{3}{2} \iff x \leq \frac{3}{2}S$ car $S > 0$ (et, de même : $f'(x) = 0 \iff x = \frac{3}{2}S$)
Nous obtenons donc le tableau de signe ci-après pour $f'(x)$, ainsi que le tableau de variations de f, dans lequel nous faisons figurer les informations suivantes :

$f(0) = 0,\ f\left(\frac{3S}{2}\right) = -\frac{1}{2S} \times \frac{9S^2}{4} + \frac{3}{2} \times \frac{3S}{2} = -\frac{9S}{8} + \frac{9S}{4} = \frac{9S}{8}$

Pour tout réel x, $f(x) = -\frac{1}{2S}x^2 + \frac{3}{2}x = x\left(-\frac{1}{2S}x + \frac{3}{2}\right)$

Puis, par somme et produit de limites (en rappelant $S > 0$) : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

x	0		$\frac{3}{2}S$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{9S}{8}$	↘	$-\infty$

Pour la limite de f en $+\infty$, j'ai exprimé $f(x)$ de manière à éviter une forme indéterminée et effectuer un calcul direct de limite.
Si vous ne l'avez pas vu l'année passée, vous pourrez bientôt utiliser le fait que la limite d'une fonction polynomiale ***en*** *$+\infty$* ***ou en*** *$-\infty$ est égale à la limite du terme de plus haut degré. Autrement dit, ici :* $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{2S}x^2 + \frac{3}{2}x = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{2S}x^2 = -\infty$. *Directement, sans passer par la case factorisation.*
Vous pourrez aussi utiliser le fait que la limite d'un quotient de fonctions polynomiales ***en*** *$+\infty$* ***ou en*** *$-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré.*

2)b) *Montrer que (v_n) est croissante revient à montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq v_{n+1}$. Montrer qu'elle est majorée par S revient à montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq S$. La fusion des deux propriétés à montrer donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq v_{n+1} \leq S$. Si nous pouvions faire d'une pierre deux coups et montrer tout cela en même temps...*
Ah bon, la fusion des deux propriétés donne vraiment cet encadrement ? Quid de ce « $v_{n+1} \leq S$ » qui n'apparaissait dans aucune des deux propriétés fusionnées ? Il découle naturellement du fait que pour tout entier naturel n, $v_n \leq S$. Et comme, pour tout entier naturel n, $n+1$ est aussi un entier naturel...

Maintenant, comment pouvons-nous montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq v_{n+1} \leq S$? On sait que l'on peut passer d'un terme au suivant de la suite (v_n) en appliquant la fonction f... Une récurrence semble donc de bon ton. Le tableau de variations de f nous indique qu'elle est croissante sur $[0\ ;S]$. D'où l'idée, de montrer, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq S$
Le fait d'ajouter $0 \leq v_n$ à la propriété à démontrer nous garantira de rester dans le bon intervalle pour pouvoir profiter des variations de f, que nous avions étudiées sur $\mathbb{R}_+$ uniquement.

D'après le tableau de variations obtenu en 2)a), f est croissante sur $\left[0\ ;\frac{3}{2}S\right]$ donc a fortiori sur $[0\ ;S]$ (ce dernier intervalle étant inclus dans le premier).
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n : « $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq S$ »
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, P_n est vraie.

Initialisation : $0 < v_0 \leq S$ par hypothèse. Puis, par croissance de f sur $[0\ ;S]$:
$f(0) \leq f(v_0) \leq f(S)$. Or, $f(0) = 0$ et $f(S) = S + \frac{1}{2}S\left(\frac{S-S}{S}\right) = S$, donc $0 \leq v_1 \leq S$.
Il nous manque une relation de comparaison entre v_0 et v_1...
Par ailleurs : $v_1 = v_0 + \frac{1}{2}v_0\left(\frac{S-v_0}{S}\right) \geq v_0$ car $v_0 \geq 0$, $S > 0$ et $S - v_0 \geq 0$.

Enfin : $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq S$, c'est-à-dire que P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, P_n soit vraie, et montrons P_{n+1}.
Supposons donc : $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq S$
Par croissance de f sur $[0\ ;S]$: $f(0) \leq f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f(S)$.
Autrement dit : $0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq S$. P_{n+1} est donc vraie.
Pas l'hérédité la plus dure, une fois que le terrain a été pavé par l'idée de la récurrence et l'utilisation des variations de f...

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure que pour tout entier naturel n, P_n est vraie. Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq S$
En conclusion, (v_n) est bien croissante et majorée par S

Le théorème de convergence monotone nous permet alors d'affirmer que (v_n) converge vers un réel $l \leq S$. Plus précisément, nous savons : $0 \leq l \leq S$ (car : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq S$).
De plus, f étant continue sur $[0\ ;S]$ (car dérivable), nous pouvons affirmer : $f(l) = l$.
C'est ce sympathique théorème que vous voyez en Terminale, parfois sous le nom de « théorème du point fixe » , qui vous assure que si (u_n) est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, si (u_n) converge vers l, et si l appartient à un intervalle I sur lequel f est continue, alors $f(l) = l$.
Autrement dit : $l + \frac{1}{2}l\left(\frac{S-l}{S}\right) = l$, ou encore : $\frac{1}{2}l\left(\frac{S-l}{S}\right) = 0$, c'est-à-dire : $l(S-l) = 0$

Donc : $l = 0$ ou $l = S$. Mais, (v_n) étant croissante, nous savons : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geq v_0$. Par passage à la limite : $l \geq v_0$. Et $v_0 > 0$. Donc $l > 0$, et enfin, la suite (v_n) converge vers S.

Attention : par passage à la limite, les inégalités se conservent au sens large. Par exemple, même partir d'une inégalité $v_n > 0$ n'aurait pas garanti, en faisant tendre n vers $+\infty$, d'obtenir $l > 0$. Cela aurait juste donné : $l \geq 0$. Cet exercice corrigé en vidéo insiste notamment sur une telle nuance.
Par ailleurs, face à une suite croissante, on pense rarement à comparer son terme général à son premier terme (et bien plus souvent à comparer v_n et v_{n+1}, même si ça peut tirer d'affaire comme dans notre cas. Et comme dans cet autre exercice corrigé qui vous fait démontrer le théorème des suites adjacentes.

3)a) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{1}{2}x\left(\frac{S-x}{S}\right)\left(\frac{x-A}{S}\right)$

Pour tout réel x : $f(x) - x = \frac{1}{2}x\left(\frac{S-x}{S}\right)\left(\frac{x-A}{S}\right) = \frac{1}{2S^2}x(S-x)(x-A)$, avec $2S^2 > 0$

De plus, pour tout x appartenant à $]0\ ;S[$, $x(S-x) > 0$ donc $f(x) - x$ est du signe de $x - A$
$f(x) - x$ est donc strictement négatif sur $]0\ ;A[$, strictement positif sur $]A\ ;S[$, et s'annule en A. En outre, $f(x) - x$ s'annule en 0 et en S
Le tableau de signe suivant résume ces informations :

x	0		A		S
$f(x) - x$	0	$-$	0	$+$	0

Certains auraient peut-être préféré s'amuser à rajouter une ligne + pour le signe de x et une ligne + pour le signe de $S - x$, mais comme ils sont positifs sur l'intervalle demandé, j'ai préféré m'occuper de leurs cas au préalable. En n'oubliant pas, pour être exhaustif, les annulations provoquées en 0 et en S.

3)b) *Dans ce genre de situation, il est de bon ton d'établir au préalable que pour tout $x \in]0\ ;A[$, $f(x) \in]0\ ;A[$; Autrement dit, que l'intervalle $]0\ ;A[$ est stable par la fonction f. Une fois cela fait, il ne devrait pas être trop difficile de prouver que tous les termes de la suite (v_n) appartiennent à cet intervalle, étant donné que c'est vrai pour le premier terme v_0, et que pour tout entier naturel n, v_{n+1} est l'image de v_n par cette fameuse fonction f...*

Par stricte croissance de f sur $[0\ ;S]$ et donc sur $[0\ ;A]$: $\forall x \in]0\ ;A[$, $f(0) < f(x) < f(A)$.
Or, $f(0) = 0$ et $f(A) = A$. Donc $0 < f(x) < A$
Nous avons donc établi : $\forall x \in]0\ ;A[$, $f(x) \in]0\ ;A[$

Montrons maintenant par récurrence que pour tout entier naturel n, la propriété Q_n : « $v_n \in]0\ ;A[$ » est vraie.
Initialisation : $v_0 \in]0\ ;A[$ par hypothèse, c'est-à-dire que P_0 est vraie.
Hérédité : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, Q_n soit vraie, et montrons Q_{n+1}.
Supposons donc : $v_n \in]0\ ;A[$. Vu ce que nous avions démontré au préalable : $f(v_n) \in]0\ ;A[$.
Autrement dit : $v_{n+1} \in]0\ ;A[$, et Q_{n+1} est donc vraie.
Une hérédité encore plus immédiate que la précédente. Mais là encore, le terrain a été pavé au préalable par l'établissement de la stabilité de $]0\ ;A[$ *par* f.
Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure que pour tout entier naturel n, Q_n est vraie. Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in]0\ ;A[$

Etablissons maintenant la décroissance de (v_n).
Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = f(v_n) - v_n$ avec $v_n \in]0\ ;A[$. Donc, d'après 3a), $v_{n+1} - v_n < 0$. La suite (v_n) est donc (strictement) décroissante.
De plus, (v_n) est minorée par 0. Donc d'après le théorème de convergence monotone, (v_n) converge vers un réel $l \in [0\ ;A] \subset [0\ ;S]$

$\subset$ signifie « est inclus dans ». Dire $A \subset B$, c'est-à-dire que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B, signifie que tout élément x de l'ensemble A appartient aussi à l'ensemble B.

De même qu'en 2b), f étant continue sur $[0\ ;S]$ (car dérivable) et donc sur $[0\ ;A]$, nous pouvons affirmer : $f(l) = l$. Autrement dit : $f(l) - l = 0$ et donc, d'après 3a) : $l = 0$ ou $l = A$.
Ici encore, comme en 2b), nous allons pouvoir procéder par élimination.
Mais, (v_n) étant décroissante, nous savons : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq v_0$. Par passage à la limite : $l \leq v_0$. Et $v_0 < A$. Donc $l < A$, et enfin, la suite (v_n) converge vers 0.

3)c) *Oula... Tout refaire, vraiment ? À voir... La 3b) aura au moins eu le mérite de débroussailler le chemin niveau idées.*
Par stricte croissance de f sur $[0\ ;S]$ et donc sur $[A\ ;S]$: $\forall x \in]A\ ;S]$, $f(A) < f(x) \leq f(S)$.
Or, $f(A) = A$ et $f(S) = S$. Donc $A < f(x) \leq S$
Nous avons donc établi : $\forall x \in]A\ ;S],\ f(x) \in]A\ ;S]$
Puis, par une récurrence similaire à 3b), nous pouvons en déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in]A\ ;S]$
Non, ce n'est pas de l'abus et non, ça ne fait pas « flemmard » sur une copie, dans ce genre

de cas précis. Nous avons bien détaillé la récurrence en 2a), et ce serait exactement la même ici, au changement d'intervalle près.
De plus : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = f(v_n) - v_n$ avec $v_n \in]A\ ;S]$. Donc, d'après 3a), $v_{n+1} - v_n \geq 0$.
La suite (v_n) est donc croissante.
De plus, (v_n) est majorée par 0. Donc d'après le théorème de convergence monotone,
(v_n) converge vers un réel $l \in [A\ ;S] \subset [0\ ;S]$

De même qu'en 3b), l vérifie l'égalité $f(l) - l = 0$ et donc, d'après 3a) : $l = A$ ou $l = S$
Pourquoi pas $l = 0$ ou $l = A$ comme en 3b) ? Parce qu'ici, $l \in [A\ ;S]$
Mais, (v_n) étant croissante, nous savons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq v_0$. Par passage à la limite : $l \geq v_0$.
Et $v_0 > A$. Donc $l > A$, et enfin, la suite (v_n) converge vers S.

Enfin, si $v_0 = A$, étant donné que $f(A) = A$ et que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$, une récurrence immédiate permet d'établir : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = A$.
Autrement dit, dans ce cas, la suite (v_n) est constante égale à A.

Vous balancer un « par récurrence immédiate » dès l'exercice 1... Risqué... Le but n'est pas de vous habituer à la nonchalance rédactionnelle : il ne s'agira pas d'écrire ça dès que vous aurez la flemme de rédiger une récurrence. Il s'agit plutôt de constater honnêtement que l'initialisation d'une telle récurrence est immédiate ($v_0 = A$), et que son hérédité est honnêtement triviale : si, pour un certain entier naturel n, $v_n = A$ (hypothèse de récurrence), alors $v_{n+1} = f(v_n) = f(A) = A$

3)d) S est l'effectif maximal de la population : en effet, le nombre initial d'individus v_0 appartient à $]0\ ;S]$, et dans les questions 3b) et 3c), nous avons établi, dans les deux cas suivant la valeur de v_0 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in]0\ ;S]$.
Quant à A, c'est l'effectif initial minimal pour qu'il n'y ait pas extinction : en effet, les questions 3b) et 3c) nous ont permis d'établir : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ si et seulement si $v_0 < A$

Exercice 2

Prenons nos précautions et d'une main de maître
comptons les solutions malgré ce paramètre.

Énoncé : (temps conseillé : 40 min) (***) *d'après Agro-Véto 2023 CR*

Soit λ un réel strictement positif. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\lambda(x-1)}$, et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{-x} - 1$
On s'intéresse aux points fixes de f sur $[0\,;1]$, c'est-à-dire aux solutions sur $[0\,;1]$ de l'équation $f(x) = x$

1) Déterminer le signe sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction g.

2) Montrer que, si $\lambda \leq 1$, alors l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[0\,;1]$.

3) Montrer que, si $\lambda > 1$, alors l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions sur $[0\,;1]$.

Remarques sur l'énoncé :

L'énoncé originel comprenait quelques indications supplémentaires, que j'ai éhontément supprimées pour corser le tout.

Correction de l'exercice 2 :

1) *Résoudre directement une inéquation pour déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}_+$ semble compliqué ici, avec la variable x qui se trouve à la fois en exposant de e et « en dehors ». Dans ce genre de situation, lorsque vous n'avez pas mieux, pensez à étudier les variations de g (signe de la dérivée...), en espérant que ses variations vous donnent des informations sur son signe (par exemple, en constatant que g admet un minimum positif ou un maximum négatif).*

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par composée, produit, et somme de fonctions dérivables. De plus, pour tout réel positif x : $g'(x) = e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$, qui est du signe de $1-x$ car $e^{-x} > 0$
On obtient donc le tableau de signe de $g'(x)$, ainsi que le tableau de variations de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		↗	$e^{-1}-1$	↘	

$g(1) = e^{-1} - 1 = e^{-1} - e^0 < 0$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.
Et $g(1)$ est le maximum de g sur $\mathbb{R}_+$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) \leq g(1) < 0$
Enfin, la fonction g est strictement négative sur $\mathbb{R}_+$.
Pour parvenir à mes fins et trouver le signe de g, le signe de $g(1)$ me suffisait ici. Je ne me suis embêté à calculer ni $g(0)$ ni la limite en $+\infty$ de $g(x)$

2) *Ca sent le corollaire du théroème des valeurs intermédiaires (ou théorème de la bijection) à plein nez. Sauf qu'il faudrait une équation qui se termine par « = constante » plutôt que « = x » pour pouvoir l'appliquer... Mais que faire de ce x ? Le passer de l'autre côté par soustraction, tout simplement.*

Soit la fonction Φ définie sur $[0\,;1]$ par $\Phi(x) = f(x) - x$. L'équation $f(x) = x$ est équivalente à $\Phi(x) = 0$. Montrons donc que si $\lambda \leq 1$, alors l'équation $\Phi(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\,;1]$.

La fonction Φ, définie sur $[0\,;1]$ par $\Phi(x) = e^{\lambda(x-1)} - x$ est dérivable sur $[0\,;1]$ (par composée et somme de fonctions dérivables). Φ est donc a fortiori continue sur $[0\,;1]$.

Pour tout $x \in [0\,;1]$, $\Phi'(x) = \lambda e^{\lambda(x-1)} - 1$
Mais comment obtenir le signe de cette expression ? N'oublions pas qu'ici : $\lambda \in]0\,;1]$
Pour tout $x \in [0\,;1]$, $x - 1 \leq 0$ donc (puisque $\lambda > 0$) : $\lambda(x-1) \leq 0$ puis, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e^{\lambda(x-1)} \leq e^0 = 1$. Par suite, λ étant positif : $\lambda e^{\lambda(x-1)} \leq \lambda \leq 1$
Donc : $\lambda e^{\lambda(x-1)} - 1 \leq 0$, c'est-à-dire : $\Phi'(x) \leq 0$.
J'aurais préféré une inégalité stricte pour obtenir la décroissance stricte de Φ*, nécessaire ici pour pouvoir appliquer le corollaire du TVI...*

• Si $\lambda < 1$, nous savons en fait : $\forall x \in [0\,;1]$, $\lambda e^{\lambda(x-1)} \leq \lambda < 1$ donc $\lambda e^{\lambda(x-1)} - 1 < 0$. Autrement dit : $\forall x \in [0\,;1], \Phi'(x) < 0$ et donc Φ est strictement décroissante sur $[0\,;1]$.
• Si $\lambda = 1$: $\forall x \in [0\,;1]$, $\Phi'(x) = e^{x-1} - 1 \leq 0$.
Et : $\Phi'(x) = 0 \iff e^{x-1} = 1 \iff e^{x-1} = e^0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$
L'équivalence $e^a = e^b \iff a = b$ *est permise car la fonction exponentielle est strictement monotone - donc injective, direz-vous l'an prochain - et ne peut donc pas renvoyer la même valeur à deux réels différents.*
Φ' est donc négative sur $[0\,;1]$, et ne s'annule qu'en un réel ($x = 0$). Dans ce cas aussi, Φ est strictement décroissante sur $[0\,;1]$.

La plupart des élèves ont bien en tête le fait que pour une fonction h dérivable sur un intervalle I (non réduit à un point), lorsque la dérivée h' *est strictement positive (resp. strictement négative) sur I, h est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I. Mais beaucoup oublient que lorsque la dérivée* h' *est positive (resp. négative) sur I en ne s'annulant qu'en un nombre fini* de points, cela ne nuit pas à la stricte croissance (resp. décroissance) de h.*
**Pour l'anecdote, même un ensemble dénombrable d'annulations de* h' *ne nuit pas à la stricte monotonie de h dans ce cas. Nous ne rentrerons pas dans le détail de ce concept théorique, mais contentons-nous d'un exemple illustrateur : si h est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, si* h' *est positive sur* $\mathbb{R}$ *et s'annule uniquement en les multiples de* 2π *(dont l'ensemble, infini dénombrable, est noté* $2\pi\mathbb{Z}$*), alors h est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*. Ainsi, la fonction* $h : x \mapsto x - \sin(x)$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*...*

Dans les deux cas, Φ est bien strictement décroissante sur $[0\,;1]$.

De plus : $\Phi(0) = e^{-\lambda} > 0$ et $\Phi(1) = e^0 - 1$

Attendez mais $e^0 - 1$*, ça fait précisément* 0*!! Φ(1) est donc égal à* 0*; autrement dit,* 1 *est une solution de l'équation* $\Phi(x) = 0$*... Aurions-pu voir cette solution évidente plus tôt ? Oui - et l'auteur de ce document vous prie de bien vouloir le croire lorsqu'il vous affirme qu'il l'a vue avant d'écrire tout ça. Pourquoi ne pas l'avoir fait remarquer d'entrée de jeu alors ? Pour se mettre un petit peu dans la peau de l'élève consciencieux qui aurait pu passer à côté, même s'il est de bon ton, dans ce genre de cas, de voir s'il n'y a pas une solution évidente à l'œil nu. Et pour voir ce qu'il est possible de faire par rapport à son intention initiale d'appliquer le corollaire du TVI.*
Nous faut-il rectifier le tir après avoir constaté $\Phi(1) = 0$ *? Pas nécessairement. Nous pouvons nous contenter de conclure comme suit :*

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (TVI) nous permet donc de conclure que l'équation $\Phi(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\,;1]$.
Cette équation étant équivalente à l'équation $f(x) = x$, nous pouvons finalement affirmer que si $\lambda \leq 1$, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[0\,;1]$.
Et nous savons (ce que l'énoncé ne demande pas) que cette solution est 1.

Mais si nous avions vu, avant de nous lancer dans la rédaction du corollaire du TVI, que $\Phi(1) = 0$*, aurions-nous pu aller plus vite ? Légèrement. Etablir la stricte croissance de* Φ *sur* $[0\,;1]$ *reste nécessaire. Nous aurions pu nous économiser le fait de parler de la continuité de* Φ *(mais la belle affaire, nous justifions sa dérivabilité pour étudier ses variations...) ainsi que le calcul de* $\Phi(0)$*. Bon... Après justification de la stricte croissance de* Φ *sur* $[0\,;1]$ *comme précédemment, la rédaction aurait pu ressembler à ça :*
Donc : $\forall x \in [0\,;1[,\ \Phi(x) < \Phi(1) = 0$. L'équation $\Phi(x) = 0$ n'admet donc aucune solution sur $[0\,;1[$ (et 1 est solution). Enfin, 1 est l'unique solution de cette équation sur $[0\,;1]$.

En ce qui concerne l'établissement de la stricte décroissance de Φ*, le rapport du jury - dont je ne me ferai pas systématiquement l'écho dans ce document - de l'épreuve dont cet exercice est tiré se révèle édifiant : « la justification de la stricte monotonie n'est quasiment jamais correcte (en l'occurrence dérivée négative ne s'annulant qu'en au plus un point) ». Lorsque vous vous entraînerez, en deuxième année, sur des annales de concours, prenez le temps, après votre travail, de lire les rapports de jury. Conseil un chouia précoce, mais qui*

sera probablement réitéré par vos enseignants...

3) Reprenons la fonction Φ introduite en 2). Pour tout $x \in [0\,;1]$, $\Phi'(x) = \lambda e^{\lambda(x-1)} - 1$
Cette fois-ci, avec λ qui n'est plus inférieur à 1, le signe de Φ' risque de ne pas être constant sur $[0\,;1]$ (on peut aussi s'en douter vu le résultat demandé par l'énoncé). On peut constater notamment : $\Phi'(1) = \lambda - 1 > 0$ et $\Phi'(0) = \lambda e^{-\lambda} - 1$... Eh mais il me dit quelque chose, lui !

Φ' est dérivable - donc continue - sur $[0\,;1]$ par composée et somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in [0\,;1]$, $\Phi''(x) = \lambda^2 e^{\lambda(x-1)} > 0$.
Φ' est donc strictement croissante sur $[0\,;1]$.
La stricte croissance de Φ' pouvait aussi se justifier, sans la dériver, par composée de fonctions strictement croissantes.
De plus, $\Phi'(0) = \lambda e^{-\lambda} - 1 = g(\lambda) < 0$ d'après 1) *Ah, la question 1) est utile finalement...*
Et $\Phi'(1) = \lambda - 1 < 0$. Donc : $\Phi'(0) < 0 < \Phi'(1)$
Le corollaire du TVI nous permet d'établir l'existence et l'unicité d'un réel $\alpha \in]0\,;1[$ tel que $\Phi'(\alpha) = 0$. La stricte croissance de Φ' sur $[0\,;1]$ nous donne alors le tableau de signe suivant pour $\Phi'(x)$ et, en conséquence, le tableau de variations de Φ :

x	0		α		1
$\Phi'(x)$		$-$	0	$+$	
Φ	$e^{-\lambda}$	↘		↗	0

Eh oui, un TVI surprise préalable au TVI qu'on attendait, et qu'on va pouvoir maintenant sereinement appliquer à Φ. Sans être dérangés de ne pas connaître précisément α...
Φ est continue, strictement décroissante sur $[0\,;\alpha]$, et $\Phi(0) = e^{-\lambda} > 0$. *Que dire de $\Phi(\alpha)$?*
De plus, par stricte croissance de Φ sur $[\alpha\,;1]$, $\Phi(\alpha) < \Phi(1)$. Autrement dit, $\Phi(\alpha) < 0$.
Donc : $\Phi(\alpha) < 0 < \Phi(0)$. Le corollaire du TVI nous permet de conclure que l'équation $\Phi(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\,;\alpha]$.
En outre, comme $\Phi(1) = 0$ et comme Φ est strictement croissante sur $[\alpha\,;1]$, 1 est l'unique solution de l'équation $\Phi(x) = 0$ sur $]\alpha\,;1]$

Enfin, si $\lambda > 1$, l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions sur $[0\,;1]$.