
Vers le supérieur

Version prépa BCPST

AYOUB HAJLAOUI



Avant-propos

Ce document comporte une vingtaine de problèmes mathématiques corrigés, tous extraits de sujets de concours de fin de CPGE (concours d'entrée aux grandes écoles), en filière BCPST. Ils sont remaniés de sorte que le programme de Terminale (spécialité) est le seul prérequis pour en venir à bout. À cette fin, des questions intermédiaires ont parfois été ajoutées au sujet original. Les notions, définitions ou résultats qui pourraient manquer à l'élève pour parvenir à la résolution lui sont donnés en hypothèse, ainsi que des indications supplémentaires et remarques utiles.

La première originalité de ce document réside donc dans sa nature de pont entre le rivage du lycée et celui des concours. En se concentrant principalement sur des notions vues par l'élève l'an passé (suites, fonctions, intégrales, entre autres), il lui propose de les mobiliser pour faire tomber des questions de sujets de concours, montrant ainsi de manière pratique l'intérêt de bien maîtriser ces notions, de les voir comme des alliées de taille qui l'épauleront tout au long de la prépa, plutôt que de présenter leur révision comme une corvée estivale. En outre, de par les nouveautés introduites ça et là pour affiner ces dernières, de par un grand nombre de questions abordant des notions générales de raisonnement et d'ensembles, ce recueil donne au lycéen un avant-goût de la glorieuse chevauchée qui l'attend, en lui mettant le pied à l'étrier. Il lui rappellera certaines de ses errances de l'an passé, tout en le préparant à l'année à venir - sans prétendre constituer une liste exhaustive de ce qui y sera vu.

Si ces exercices ne nécessitent pas d'autre prérequis que le programme de Terminale, ils s'avéreront, en pratique, difficiles pour un élève au sortir du lycée. Le degré d'atsuce nécessaire, les idées qu'il faut avoir pour faire tomber telle ou telle question, détonnent avec la plupart des exercices rencontrés en Terminale, dont les pistes étaient en général plus claires, et les résolutions plus « téléphonées ».

C'est ici qu'intervient la seconde originalité de ce document par rapport à d'autres recueils d'exercices corrigés, originalité qui constitue son atout majeur : la correction, très détaillée, insiste autant que possible sur « le pourquoi de l'idée », la question de l'apparition de la première étincelle : à quoi telle situation nous fait-elle penser ? pourquoi est-il judicieux d'emprunter telle voie, de penser à telle astuce à ce moment-là plutôt qu'à un autre ? quel écueil faut-il éviter et comment voir que c'est un piège ? Vous trouverez de telles considérations en italique, en parallèle de la correction à proprement parler. Autant de didascalies rythmant la pièce de théâtre mathématique aux premières loges de laquelle vous êtes convié. Lever de rideau.

L'auteur en quelques mots

Lauréat de l'agrégation externe de mathématiques en 2020 (64^{ème} sur 323 admis et 3069 inscrits), docteur en mathématiques appliquées (université Paris VI), diplômé de l'école d'ingénieurs des Mines de Nancy et du master recherche MVA (Maths Vision Apprentissage) de l'ENS Cachan, je donne des cours de mathématiques (particuliers et en groupe, niveau lycée à prépa/L3) depuis 2008. Je suis également colleur en MPSI au lycée Charlemagne (Paris), lycée où j'ai moi-même effectué mes années de prépa MPSI/MP.

Parallèlement, je rédige des exercices de mathématiques (principalement niveau prépa et Terminale) ainsi que des corrigés particulièrement détaillés, que vous pouvez consulter librement sur www.ayoub-et-les-maths.com. J'y explique à l'élève non seulement le cheminement, mais aussi et surtout pourquoi il doit avoir telle idée à tel moment, pourquoi telle autre idée n'est pas appropriée, quel piège il faut éviter ; cela, dans l'optique de l'entraîner au raisonnement réel, et non à la mimique maladroite qui est l'apanage du plus grand nombre.

Sur ma chaîne youtube « Ayoub et les maths », vous trouverez également bon nombre de vidéos d'exercices corrigés niveau Terminale et prépa (parmi ceux que j'ai donnés en colle notamment), des séries thématiques pour vous familiariser avec des notions spécifiques comme le signe somme, le calcul matriciel, la valeur absolue, ainsi que des conseils plus généraux pour vous améliorer en mathématiques. Et même, une série dénommée « Où est l'arnaque » : ce sont des exercices corrigés avec des erreurs de raisonnement volontaires - révélées en fin de vidéo, bien sûr - pour tester votre vigilance mathématique...

Table des matières

Introduction	page 1
Exercice 1 Modèles d'évolution d'une population (**) page 3 <i>Fonctions, suites</i>	Agro-Véto 2024 MMI
Exercice 2 Nb de points fixes en fonction d'un paramètre (***) page 10 <i>Fonctions</i>	Agro-Véto 2023 CR
Exercice 3 Inégalités logarithmiques (**) page 15 <i>Fonctions</i>	Concours G2E 2020
Exercice 4 Suite implicite, logarithme, limites (***) page 18 <i>Fonctions, suites</i>	Oral Agro-Véto 2022
Exercice 5 Suites implicites (encore), log, équivalents (****) page 23 <i>Fonctions, suites</i>	Oral Agro-Véto 2018
Exercice 6 Equation différentielle à coeffs non constants (**) page 28 <i>Fonctions, primitives, équations différentielles</i>	Concours G2E 2021
Exercice 7 Intégrales et quotients (**) page 33 <i>Primitives, équations différentielles, intégrales</i>	ENS 2018 BCPST
Exercice 8 Sommes de Riemann, convergence de suites (***) page 36 <i>Suites, intégrales</i>	Agro-Véto 2009 Maths A
Exercice 9 Arccos, dérivée et intégrale (***) page 41 <i>Fonctions, trigonométrie, intégrales</i>	Concours G2E 2022
Exercice 10 Limites d'intégrales, dérivées n-ièmes de cos (***) page 46 <i>Fonctions, trigonométrie, intégrales</i>	Agro-Véto 2013 Maths A

Exercice 11	Dynamique de deux populations	(****)	page 53
	<i>Fonctions, équations différentielles, primitives, intégrales</i>		ENS 2024 BCPST
Exercice 12	Comparaison somme intégrale, équivalents	(****)	page 60
	<i>Fonctions, suites, primitives, intégrales</i>		Agro-Véto 2016 CR
Exercice 13	Jeu sur des coefficients de polynômes	(****)	page 66
	<i>Fonctions, primitives, intégrales, polynômes</i>		ENS 2018 BCPST
Exercice 14	Salade de coefficients binomiaux	(****)	page 73
	<i>Suites, dénombrement</i>		Agro-Véto 2024 CR
Exercice 15	Quel est l'avion le plus sûr ?	(**)	page 78
	<i>Fonctions, probabilités, dénombrement</i>		Concours G2E 2014
Exercice 16	Convexité, variables aléatoires, espérance	(****)	page 82
	<i>Fonctions, probabilités</i>		ENS 2021 BCPST
Exercice 17	Urne, boules, probabilités composées	(***)	page 89
	<i>Probabilités, dénombrement</i>		Agro-Véto 2022 CR
Exercice 18	Probabilités, transformation d'Abel	(***)	page 94
	<i>Suites, probabilités</i>		Agro-Véto 2009 Maths B
Quelques rappels de calcul matriciel			page 97
Exercice 19	Matrices pseudo-inversibles	(**)	page 104
	<i>Calcul et raisonnement matriciel</i>		Agro-Véto 2016 CR
Exercice 20	Valeurs propres et vecteurs propres	(***)	page 107
	<i>Calcul et raisonnement matriciel</i>		Concours G2E 2023

Introduction

Les problèmes présentés dans ce document sont de longueur et difficulté variables. Une évaluation de cette dernière, subjective, est précisée à titre indicatif en début de chaque problème :

(*) facile (**) moyen (***) difficile (****) particulièrement difficile

J'insiste sur le caractère subjectif de cette évaluation. Si elle s'appuie sur des paramètres tels la complexité des notions mises en oeuvre et le fait que les astuces à voir pour résoudre les questions de chaque exercice soient plus ou moins cachées, plus ou moins évidentes, l'observation empirique l'influence grandement : une sorte de moyenne vague de la difficulté ressentie par les nombreux élèves que j'ai pu côtoyer (cours particuliers, TD, colles...) face à un genre de question ou d'enchaînement de questions. Il s'agit aussi, pour moi, de comparer, en termes de difficulté, les exercices de ce document les uns aux autres.

Pas de panique, donc, si vous butez face à un exercice classé comme « moyen » ou « facile » . Faites de votre mieux dans le temps imparti, puis lisez attentivement la correction.

L'annale d'origine de chaque problème est indiquée. Dans le cas du concours Agro-Véto, les initiales CR et MMI désigneront respectivement les épreuves de « calcul et raisonnement » et de « modélisation mathématique et informatique ».

Pour chaque problème, un temps de travail préconisé est indiqué. Il ne correspond pas forcément au temps au bout duquel l'exercice doit être résolu, mais plutôt au temps de recherche au bout duquel il devient raisonnable de commencer à regarder la correction. Il peut en effet être pertinent de vous imposer de réfléchir en temps limité, pour vous entraîner aux conditions d'examen. Mais si tel énoncé vous intrigue particulièrement, si vous vous sentez prêt de le faire tomber, si vous aimeriez en venir à bout (peut-être pour des raisons de fierté personnelle, peut-être pas), quitte à lui consacrer plus de temps que les autres, n'hésitez surtout pas. C'est en jouant de ces deux modes temporels que l'on peut s'améliorer durablement en mathématiques. Une telle idée est développée plus en détail [dans cet article](#).

Chaque énoncé est suivi de « remarques sur l'énoncé ». Il ne s'agit nécessairement d'indications sur la résolution, mais plutôt de précisions sur les notations introduites par l'énoncé, ou de rappels de concepts mathématiques utiles.

La correction à proprement parler est en caractères normaux. Les passages en italique correspondent à des commentaires sur cette correction. Principalement, le fameux « pourquoi de l'idée », cette substance fugace décrite tant bien que mal dans l'avant-propos. Mais aussi, par moments, des réflexions sur d'autres méthodes que celle choisie dans la correction, des analogies avec d'autres situations, des discussions sur telle ou telle erreur courante commise par les élèves à tel endroit. Plus rarement, deux ou trois confidences sur mes choix éditoriaux : pourquoi ai-je reformulé ainsi la question origi-

nellement présente dans le sujet ? Pourquoi ai-je ajouté telle question ? Vous mettre à la place du « concepteur » du sujet (même si le titre qui me conviendrait le mieux ici serait celui de reformulateur), tenter d'en comprendre la cohérence, vous attacher aux liens entre les questions et à leur fil conducteur peut vous aider à vous sortir du labyrinthe.

Place, maintenant, à de brèves considérations d'ordre général, qui seront complétées au besoin par les remarques sur chaque énoncé. Votre aventure mathématique dans le supérieur consistera en grande partie en la manipulation d'**assertions**. Ce sont des phrases syntaxiquement correctes (autrement dit, qui ont du sens) et qui sont soit vraies, soit fausses.

Comment ça, « soit vraies, soit fausses » ? N'est-ce pas trop général comme définition ? Toute phrase ne deviendrait-elle pas une assertion ?

Certainement pas, voyez plutôt :

- $A : « 3^2 + 12 \times 7 »$ n'est pas une assertion, car dire qu'elle serait vraie ou fausse n'aurait aucun sens.
- $B : « \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2 »$ n'est pas une assertion, car elle n'est pas syntaxiquement correcte.
- $C : « \forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 > 0 »$ est une assertion. C'est même une assertion vraie.
- $D : « \exists x \in \mathbb{R}, e^x \leq 0 »$ est une assertion. C'est une assertion fausse.
- $D : « x + 7 \geq 2 »$ est une assertion. C'est une assertion dont la véracité dépend du choix du paramètre x . Pour l'anecdote, une telle assertion est appelée un prédicat.

Rappelons la signification des symboles $\forall$ et $\exists$:

- $\forall$ signifie : « pour tout », ou encore « quel que soit ». L'assertion C se lit donc : « pour tout réel x non nul, $x^2 > 0$ ». Ou encore, de manière équivalente : « quel que soit le réel x non nul, $x^2 > 0$ »
- $\exists$ signifie « il existe ». L'assertion D se lit donc : « il existe un réel x tel que $e^x \leq 0$ ». Voyez comment j'ai intercalé un « tel que » à la place de la virgule, pour que la phrase ait du sens en français.

Si A et B sont deux assertions mathématiques, « $A \implies B$ » (se lit « A implique B ») veut dire que si A est vrai, alors B est vrai.

Autrement dit, A est une condition suffisante à B .

Il suffit que A soit vrai pour que B soit vrai.

Autrement dit, B est une condition nécessaire à A .

A ne peut pas être vrai sans que B ne soit vrai.

« $A \iff B$ » (se lit « A équivaut à B » ou « A est équivalent à B ») veut dire que nous avons à la fois $A \implies B$ et $B \implies A$. Autrement dit : A est vrai si et seulement si B est vrai.

La négation de « $A \implies B$ », notée $\text{non}(A \implies B)$, est « A et $\text{non}(B)$ ».

Autrement dit, A n'entraîne pas B puisque A est réalisé mais pas B

Exercice 1

*Modélisons à coups de suites et fonctions
cette espèce inconnue qui fuit son extinction.*

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure 20 min) (**) d'après Agro-Véto 2024 MMI

On s'intéresse à des modèles d'évolution d'une population. Dans chacun des modèles, une suite (v_n) modélise le nombre d'individus dans la population à la génération n . On dit qu'il y a extinction si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

1) Pour commencer, on propose le modèle suivant : chaque individu a un nombre de descendants $q > 0$, de telle sorte que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = qv_n$. On suppose que $v_0 > 0$. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n et donner une condition d'extinction.

2) On propose un nouveau modèle. On définit une suite (v_n) par :

$v_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}v_n \left(\frac{S - v_n}{S} \right)$ où $S \in]0 ; +\infty[$ est une constante du problème.

a) Déterminer une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f(v_n)$. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

b) On suppose maintenant que $v_0 \in]0 ; S]$. Montrer que (v_n) est croissante et majorée par S . En déduire qu'elle converge et donner sa limite.

3) On souhaite affiner le modèle en modifiant la fonction f . Désormais :

$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}v_n \left(\frac{S - v_n}{S} \right) \left(\frac{v_n - A}{S} \right)$, où $A \in]0 ; S[$ est fixé.

a) Identifier f . Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[0 ; S]$.

b) Dans cette question, $v_0 \in]0 ; A[$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n \in]0 ; A[$, puis que (v_n) est décroissante. En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.

c) Réaliser une étude analogue lorsque $v_0 \in]A ; S]$. Que se passe-t-il si $v_0 = A$?

d) Donner une interprétation des quantités A et S dans le modèle de la question 3.

Remarques sur l'énoncé :

Rappelons la signification de ces symboles, mis en jeu dans cet énoncé et la correction :

- $\forall$ signifie : « pour tout », ou encore « quel que soit ».
- $\in$ signifie « appartient à ».
- $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des réels positifs. C'est donc $[0 ; +\infty[$

Correction de l'exercice 1 :

1) Dans ce modèle, (v_n) est une suite géométrique de raison q . Nous savons donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n \quad \text{Bon, ça commence assez gentiment.}$$

v_0 étant strictement positif, il y a trois situations possibles pour la limite de (v_n) : si $q > 1$, (v_n) diverge vers $+\infty$. Si $q = 1$, (v_n) est constante et converge donc vers v_0 . Enfin, si $0 < q < 1$, (v_n) converge vers 0. Il y a donc extinction dans ce cas, et dans ce cas uniquement. Autrement dit, il y a extinction si et seulement si $q \in]0 ; 1[$.

L'énoncé parle de « condition d'extinction » sans plus de précisions. Condition nécessaire ? Condition suffisante ? Vu la formulation, il semblerait que le correcteur puisse se contenter d'une condition suffisante : une condition qui, si elle est remplie, entraîne qu'il y a extinction. Ici, si $q \in]0 ; 1[$, alors il y a bien extinction. Mais la condition $q \in]0 ; 1[$ est aussi une condition nécessaire pour qu'il y ait extinction : s'il y a extinction, alors nécessairement, $q \in]0 ; 1[$ (car, comme vu plus haut, aucune des autres valeurs possibles pour q ne permet que (v_n) converge vers 0). Cette condition $q \in]0 ; 1[$ est donc une condition nécessaire et suffisante d'extinction, ce qui m'a permis d'écrire ce « si et seulement si ».

2)a) Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = f(v_n)$, où f est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x\left(\frac{S-x}{S}\right) = x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2S}x^2 = -\frac{1}{2S}x^2 + \frac{3}{2}x$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car polynomiale.

Oui, f est même dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc a fortiori sur $\mathbb{R}_+$, intervalle sur lequel sa dérivabilité m'intéresse ici.

$$\text{Pour tout réel positif } x, f'(x) = -\frac{2}{2S}x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{S}x + \frac{3}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : f'(x) \geq 0 \iff -\frac{1}{S}x + \frac{3}{2} \geq 0 \iff \frac{1}{S}x \leq \frac{3}{2} \iff x \leq \frac{3}{2}S \text{ car } S > 0 \text{ (et, de même :}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{3}{2}S)$$

Nous obtenons donc le tableau de signe ci-après pour $f'(x)$, ainsi que le tableau de variations de f , dans lequel nous faisons figurer les informations suivantes :

$$f(0) = 0, f\left(\frac{3S}{2}\right) = -\frac{1}{2S} \times \frac{9S^2}{4} + \frac{3}{2} \times \frac{3S}{2} = -\frac{9S}{8} + \frac{9S}{4} = \frac{9S}{8}$$

$$\text{Pour tout réel } x, f(x) = -\frac{1}{2S}x^2 + \frac{3}{2}x = x\left(-\frac{1}{2S}x + \frac{3}{2}\right)$$

Puis, par somme et produit de limites (en rappelant $S > 0$) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

x	0	$\frac{3}{2}S$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{9S}{8}$	$-\infty$

Pour la limite de f en $+\infty$, j'ai exprimé $f(x)$ de manière à éviter une forme indéterminée et effectuer un calcul direct de limite.

Si vous ne l'avez pas vu l'année passée, vous pourrez bientôt utiliser le fait que la limite d'une fonction polynomiale **en** $+\infty$ **ou en** $-\infty$ est égale à la limite du terme de plus haut degré. Autrement dit, ici : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2S}x^2 + \frac{3}{2}x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2S}x^2 = -\infty$. Directement, sans passer par la case factorisation.

Vous pourrez aussi utiliser le fait que la limite d'un quotient de fonctions polynomiales **en** $+\infty$ **ou en** $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré.

2)b) Montrer que (v_n) est croissante revient à montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_{n+1}$. Montrer qu'elle est majorée par S revient à montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq S$. La fusion des deux propriétés à montrer donne : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_{n+1} \leq S$. Si nous pouvions faire d'une pierre deux coups et montrer tout cela en même temps...

Ah bon, la fusion des deux propriétés donne vraiment cet encadrement ? Quid de ce « $v_{n+1} \leq S$ » qui n'apparaissait dans aucune des deux propriétés fusionnées ? Il découle naturellement du fait que pour tout entier naturel n , $v_n \leq S$. Et comme, pour tout entier naturel n , $n+1$ est aussi un entier naturel...

Maintenant, comment pouvons-nous montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_{n+1} \leq S$? On sait que l'on peut passer d'un terme au suivant de la suite (v_n) en appliquant la fonction f ... Une récurrence semble donc de bon ton. Le tableau de variations de f nous indique qu'elle est croissante sur $[0; S]$. D'où l'idée, de montrer, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq S$. Le fait d'ajouter $0 \leq v_n$ à la propriété à démontrer nous garantira de rester dans le bon intervalle pour pouvoir profiter des variations de f , que nous avons étudiées sur $\mathbb{R}_+$ uniquement.

D'après le tableau de variations obtenu en 2)a), f est croissante sur $\left[0 ; \frac{3}{2}S\right]$ donc a fortiori sur $[0 ; S]$ (ce dernier intervalle étant inclus dans le premier).

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P_n : « 0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq S »$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , P_n est vraie.

Initialisation : $0 < v_0 \leq S$ par hypothèse. Puis, par croissance de f sur $[0 ; S]$:

$f(0) \leq f(v_0) \leq f(S)$. Or, $f(0) = 0$ et $f(S) = S + \frac{1}{2}S\left(\frac{S-S}{S}\right) = S$, donc $0 \leq v_1 \leq S$.

Il nous manque une relation de comparaison entre v_0 et v_1 ...

Par ailleurs : $v_1 = v_0 + \frac{1}{2}v_0\left(\frac{S-v_0}{S}\right) \geq v_0$ car $v_0 \geq 0$, $S > 0$ et $S - v_0 \geq 0$.

Enfin : $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq S$, c'est-à-dire que P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, P_n soit vraie, et montrons P_{n+1} .

Supposons donc : $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq S$

Par croissance de f sur $[0 ; S]$: $f(0) \leq f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f(S)$.

Autrement dit : $0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq S$. P_{n+1} est donc vraie.

Pas l'hérédité la plus dure, une fois que le terrain a été pavé par l'idée de la récurrence et l'utilisation des variations de f ...

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure que pour tout entier naturel n , P_n est vraie. Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq S$

En conclusion, (v_n) est bien croissante et majorée par S

Le théorème de convergence monotone nous permet alors d'affirmer que (v_n) converge vers un réel $l \leq S$. Plus précisément, nous savons : $0 \leq l \leq S$ (car : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq S$).

De plus, f étant continue sur $[0 ; S]$ (car dérivable), nous pouvons affirmer : $f(l) = l$.

C'est ce sympathique théorème que vous voyez en Terminale, parfois sous le nom de « théorème du point fixe », qui vous assure que si (u_n) est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, si (u_n) converge vers l , et si l appartient à un intervalle I sur lequel f est continue, alors $f(l) = l$.

Autrement dit : $l + \frac{1}{2}l\left(\frac{S-l}{S}\right) = l$, ou encore : $\frac{1}{2}l\left(\frac{S-l}{S}\right) = 0$, c'est-à-dire : $l(S-l) = 0$

Donc : $l = 0$ ou $l = S$. Mais, (v_n) étant croissante, nous savons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq v_0$. Par passage à la limite : $l \geq v_0$. Et $v_0 > 0$. Donc $l > 0$, et enfin, la suite (v_n) converge vers S .

Attention : par passage à la limite, les inégalités se conservent au sens large. Par exemple, même partir d'une inégalité $v_n > 0$ n'aurait pas garanti, en faisant tendre n vers $+\infty$, d'obtenir $l > 0$. Cela aurait juste donné : $l \geq 0$. Cet exercice corrigé en vidéo insiste notamment sur une telle nuance.

Par ailleurs, face à une suite croissante, on pense rarement à comparer son terme général à son premier terme (et bien plus souvent à comparer v_n et v_{n+1} , même si ça peut tirer d'affaire comme dans notre cas. Et comme dans cet autre exercice corrigé qui vous fait démontrer le théorème des suites adjacentes.

3)a) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{1}{2}x\left(\frac{S-x}{S}\right)\left(\frac{x-A}{S}\right)$

Pour tout réel x : $f(x) - x = \frac{1}{2}x\left(\frac{S-x}{S}\right)\left(\frac{x-A}{S}\right) = \frac{1}{2S^2}x(S-x)(x-A)$, avec $2S^2 > 0$

De plus, pour tout x appartenant à $]0 ; S[$, $x(S-x) > 0$ donc $f(x) - x$ est du signe de $x - A$

$f(x) - x$ est donc strictement négatif sur $]0 ; A[$, strictement positif sur $]A ; S[$, et s'annule en A . En outre, $f(x) - x$ s'annule en 0 et en S

Le tableau de signe suivant résume ces informations :

x	0		A		S
$f(x) - x$	0	-	0	+	0

Certains auraient peut-être préféré s'amuser à rajouter une ligne + pour le signe de x et une ligne + pour le signe de $S - x$, mais comme ils sont positifs sur l'intervalle demandé, j'ai préféré m'occuper de leurs cas au préalable. En n'oubliant pas, pour être exhaustif, les annulations provoquées en 0 et en S .

3)b) Dans ce genre de situation, il est de bon ton d'établir au préalable que pour tout $x \in]0 ; A[$, $f(x) \in]0 ; A[$; Autrement dit, que l'intervalle $]0 ; A[$ est stable par la fonction f . Une fois cela fait, il ne devrait pas être trop difficile de prouver que tous les termes de la suite (v_n) appartiennent à cet intervalle, étant donné que c'est vrai pour le premier terme v_0 , et que pour tout entier naturel n , v_{n+1} est l'image de v_n par cette fameuse fonction f ...

Par stricte croissance de f sur $[0 ; S]$ et donc sur $[0 ; A]$: $\forall x \in]0 ; A[$, $f(0) < f(x) < f(A)$.

Or, $f(0) = 0$ et $f(A) = A$. Donc $0 < f(x) < A$

Nous avons donc établi : $\forall x \in]0 ; A[$, $f(x) \in]0 ; A[$

Montrons maintenant par récurrence que pour tout entier naturel n , la propriété $Q_n : \ll v_n \in]0 ; A[\gg$ est vraie.

Initialisation : $v_0 \in]0 ; A[$ par hypothèse, c'est-à-dire que P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, Q_n soit vraie, et montrons Q_{n+1} .

Supposons donc : $v_n \in]0 ; A[$. Vu ce que nous avons démontré au préalable : $f(v_n) \in]0 ; A[$.

Autrement dit : $v_{n+1} \in]0 ; A[$, et Q_{n+1} est donc vraie.

Une hérédité encore plus immédiate que la précédente. Mais là encore, le terrain a été pavé au préalable par l'établissement de la stabilité de $]0 ; A[$ par f .

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure que pour tout entier naturel n , Q_n est vraie. Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in]0 ; A[$

Etablissons maintenant la décroissance de (v_n) .

Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = f(v_n) - v_n$ avec $v_n \in]0 ; A[$. Donc, d'après 3a), $v_{n+1} - v_n < 0$. La suite (v_n) est donc (strictement) décroissante.

De plus, (v_n) est minorée par 0. Donc d'après le théorème de convergence monotone,

(v_n) converge vers un réel $l \in [0 ; A] \subset [0 ; S]$

$\subset$ signifie « est inclus dans ». Dire $A \subset B$, c'est-à-dire que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B , signifie que tout élément x de l'ensemble A appartient aussi à l'ensemble B .

De même qu'en 2b), f étant continue sur $[0 ; S]$ (car dérivable) et donc sur $[0 ; A]$, nous pouvons affirmer : $f(l) = l$. Autrement dit : $f(l) - l = 0$ et donc, d'après 3a) : $l = 0$ ou $l = A$.

Ici encore, comme en 2b), nous allons pouvoir procéder par élimination.

Mais, (v_n) étant décroissante, nous savons : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_0$. Par passage à la limite : $l \leq v_0$. Et $v_0 < A$. Donc $l < A$, et enfin, la suite (v_n) converge vers 0.

3)c) Oula... Tout refaire, vraiment ? À voir... La 3b) aura au moins eu le mérite de débroussailler le chemin niveau idées.

Par stricte croissance de f sur $[0 ; S]$ et donc sur $[A ; S]$: $\forall x \in [A ; S], f(A) < f(x) \leq f(S)$.

Or, $f(A) = A$ et $f(S) = S$. Donc $A < f(x) \leq S$

Nous avons donc établi : $\forall x \in [A ; S], f(x) \in [A ; S]$

Puis, par une récurrence similaire à 3b), nous pouvons en déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [A ; S]$

Non, ce n'est pas de l'abus et non, ça ne fait pas « flemmard » sur une copie, dans ce genre

de cas précis. Nous avons bien détaillé la récurrence en 2a), et ce serait exactement la même ici, au changement d'intervalle près.

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = f(v_n) - v_n$ avec $v_n \in]A ; S]$. Donc, d'après 3a), $v_{n+1} - v_n \geq 0$.

La suite (v_n) est donc croissante.

De plus, (v_n) est majorée par 0. Donc d'après le théorème de convergence monotone,

(v_n) converge vers un réel $l \in [A ; S] \subset [0 ; S]$

De même qu'en 3b), l vérifie l'égalité $f(l) - l = 0$ et donc, d'après 3a) : $l = A$ ou $l = S$

Pourquoi pas $l = 0$ ou $l = A$ comme en 3b) ? Parce qu'ici, $l \in [A ; S]$

Mais, (v_n) étant croissante, nous savons : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq v_0$. Par passage à la limite : $l \geq v_0$.

Et $v_0 > A$. Donc $l > A$, et enfin, la suite (v_n) converge vers S .

Enfin, si $v_0 = A$, étant donné que $f(A) = A$ et que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = f(v_n)$, une récurrence immédiate permet d'établir : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = A$.

Autrement dit, dans ce cas, la suite (v_n) est constante égale à A .

Vous balancer un « par récurrence immédiate » dès l'exercice 1... Risqué... Le but n'est pas de vous habituer à la nonchalance rédactionnelle : il ne s'agira pas d'écrire ça dès que vous aurez la flemme de rédiger une récurrence. Il s'agit plutôt de constater honnêtement que l'initialisation d'une telle récurrence est immédiate ($v_0 = A$), et que son hérédité est honnêtement triviale : si, pour un certain entier naturel n , $v_n = A$ (hypothèse de récurrence), alors $v_{n+1} = f(v_n) = f(A) = A$

3)d) S est l'effectif maximal de la population : en effet, le nombre initial d'individus v_0 appartient à $]0 ; S]$, et dans les questions 3b) et 3c), nous avons établi, dans les deux cas suivant la valeur de v_0 : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in]0 ; S]$.

Quant à A , c'est l'effectif initial minimal pour qu'il n'y ait pas extinction : en effet, les questions 3b) et 3c) nous ont permis d'établir : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ si et seulement si $v_0 < A$

Exercice 2

*Prenons nos précautions et d'une main de maître
comptons les solutions malgré ce paramètre.*

Énoncé : (temps conseillé : 40 min) (***) *d'après Agro-Véto 2023 CR*

Soit λ un réel strictement positif. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\lambda(x-1)}$, et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{-x} - 1$.
On s'intéresse aux points fixes de f sur $[0 ; 1]$, c'est-à-dire aux solutions sur $[0 ; 1]$ de l'équation $f(x) = x$

- 1) Déterminer le signe sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction g .
- 2) Montrer que, si $\lambda \leq 1$, alors l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[0 ; 1]$.
- 3) Montrer que, si $\lambda > 1$, alors l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions sur $[0 ; 1]$.

Remarques sur l'énoncé :

L'énoncé originel comprenait quelques indications supplémentaires, que j'ai éhontément supprimées pour corser le tout.

Correction de l'exercice 2 :

1) Résoudre directement une inéquation pour déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}_+$ semble compliqué ici, avec la variable x qui se trouve à la fois en exposant de e et « en dehors ». Dans ce genre de situation, lorsque vous n'avez pas mieux, pensez à étudier les variations de g (signe de la dérivée...), en espérant que ses variations vous donnent des informations sur son signe (par exemple, en constatant que g admet un minimum positif ou un maximum négatif).

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par composée, produit, et somme de fonctions dérivables. De plus, pour tout réel positif x : $g'(x) = e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$, qui est du signe de $1-x$ car $e^{-x} > 0$

On obtient donc le tableau de signe de $g'(x)$, ainsi que le tableau de variations de g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	$e^{-1} - 1$ ↗ ↘		

$g(1) = e^{-1} - 1 = e^{-1} - e^0 < 0$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Et $g(1)$ est le maximum de g sur $\mathbb{R}_+$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \leq g(1) < 0$

Enfin, la fonction g est strictement négative sur $\mathbb{R}_+$.

Pour parvenir à mes fins et trouver le signe de g , le signe de $g(1)$ me suffisait ici. Je ne me suis embêté à calculer ni $g(0)$ ni la limite en $+\infty$ de $g(x)$

2) Ça sent le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (ou théorème de la bijection) à plein nez. Sauf qu'il faudrait une équation qui se termine par « = constante » plutôt que « = x » pour pouvoir l'appliquer... Mais que faire de ce x ? Le passer de l'autre côté par soustraction, tout simplement.

Soit la fonction Φ définie sur $[0 ; 1]$ par $\Phi(x) = f(x) - x$. L'équation $f(x) = x$ est équivalente à $\Phi(x) = 0$. Montrons donc que si $\lambda \leq 1$, alors l'équation $\Phi(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0 ; 1]$.

La fonction Φ , définie sur $[0 ; 1]$ par $\Phi(x) = e^{\lambda(x-1)} - x$ est dérivable sur $[0 ; 1]$ (par composée et somme de fonctions dérivables). Φ est donc a fortiori continue sur $[0 ; 1]$.

Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $\Phi'(x) = \lambda e^{\lambda(x-1)} - 1$

Mais comment obtenir le signe de cette expression ? N'oublions pas qu'ici : $\lambda \in]0 ; 1]$

Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $x - 1 \leq 0$ donc (puisque $\lambda > 0$) : $\lambda(x - 1) \leq 0$ puis, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e^{\lambda(x-1)} \leq e^0 = 1$. Par suite, λ étant positif : $\lambda e^{\lambda(x-1)} \leq \lambda \leq 1$

Donc : $\lambda e^{\lambda(x-1)} - 1 \leq 0$, c'est-à-dire : $\Phi'(x) \leq 0$.

J'aurais préféré une inégalité stricte pour obtenir la décroissance stricte de Φ , nécessaire ici pour pouvoir appliquer le corollaire du TVI...

- Si $\lambda < 1$, nous savons en fait : $\forall x \in [0 ; 1]$, $\lambda e^{\lambda(x-1)} \leq \lambda < 1$ donc $\lambda e^{\lambda(x-1)} - 1 < 0$. Autrement dit : $\forall x \in [0 ; 1]$, $\Phi'(x) < 0$ et donc Φ est strictement décroissante sur $[0 ; 1]$.

- Si $\lambda = 1$: $\forall x \in [0 ; 1]$, $\Phi'(x) = e^{x-1} - 1 \leq 0$.

Et : $\Phi'(x) = 0 \iff e^{x-1} = 1 \iff e^{x-1} = e^0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$

L'équivalence $e^a = e^b \iff a = b$ est permise car la fonction exponentielle est strictement monotone - donc injective, direz-vous l'an prochain - et ne peut donc pas renvoyer la même valeur à deux réels différents.

Φ' est donc négative sur $[0 ; 1]$, et ne s'annule qu'en un réel ($x = 1$). Dans ce cas aussi, Φ est strictement décroissante sur $[0 ; 1]$.

La plupart des élèves ont bien en tête le fait que pour une fonction h dérivable sur un intervalle I (non réduit à un point), lorsque la dérivée h' est strictement positive (resp. strictement négative) sur I , h est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I . Mais beaucoup oublient que lorsque la dérivée h' est positive (resp. négative) sur I en ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, cela ne nuit pas à la stricte croissance (resp. décroissance) de h .*

**Pour l'anecdote, même un ensemble dénombrable d'annulations de h' ne nuit pas à la stricte monotonie de h dans ce cas. Nous ne rentrerons pas dans le détail de ce concept théorique, mais contentons-nous d'un exemple illustrateur : si h est dérivable sur $\mathbb{R}$, si h' est positive sur $\mathbb{R}$ et s'annule uniquement en les multiples de 2π (dont l'ensemble, infini dénombrable, est noté $2\pi\mathbb{Z}$), alors h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction $h : x \mapsto x - \sin(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$...*

Dans les deux cas, Φ est bien strictement décroissante sur $[0 ; 1]$.

De plus : $\Phi(0) = e^{-\lambda} > 0$ et $\Phi(1) = e^0 - 1$

Attendez mais $e^0 - 1$, ça fait précisément 0!! $\Phi(1)$ est donc égal à 0; autrement dit, 1 est une solution de l'équation $\Phi(x) = 0$... Aurions-nous vu cette solution évidente plus tôt? Oui - et l'auteur de ce document vous prie de bien vouloir le croire lorsqu'il vous affirme qu'il l'a vue avant d'écrire tout ça. Pourquoi ne pas l'avoir fait remarquer d'entrée de jeu alors? Pour se mettre un petit peu dans la peau de l'élève consciencieux qui aurait pu passer à côté, même s'il est de bon ton, dans ce genre de cas, de voir s'il n'y a pas une solution évidente à l'œil nu. Et pour voir ce qu'il est possible de faire par rapport à son intention initiale d'appliquer le corollaire du TVI.

Nous faut-il rectifier le tir après avoir constaté $\Phi(1) = 0$? Pas nécessairement. Nous pouvons nous contenter de conclure comme suit :

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (TVI) nous permet donc de conclure que l'équation $\Phi(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0 ; 1]$.

Cette équation étant équivalente à l'équation $f(x) = x$, nous pouvons finalement affirmer que si $\lambda \leq 1$, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[0 ; 1]$.

Et nous savons (ce que l'énoncé ne demande pas) que cette solution est 1.

Mais si nous avions vu, avant de nous lancer dans la rédaction du corollaire du TVI, que $\Phi(1) = 0$, aurions-nous pu aller plus vite? Légèrement. Etablir la stricte croissance de Φ sur $[0 ; 1]$ reste nécessaire. Nous aurions pu nous économiser le fait de parler de la continuité de Φ (mais la belle affaire, nous justifions sa dérivabilité pour étudier ses variations...) ainsi que le calcul de $\Phi(0)$. Bon... Après justification de la stricte croissance de Φ sur $[0 ; 1]$ comme précédemment, la rédaction aurait pu ressembler à ça :

Donc : $\forall x \in [0 ; 1[$, $\Phi(x) < \Phi(1) = 0$. L'équation $\Phi(x) = 0$ n'admet donc aucune solution sur $[0 ; 1[$ (et 1 est solution). Enfin, 1 est l'unique solution de cette équation sur $[0 ; 1]$.

En ce qui concerne l'établissement de la stricte décroissance de Φ , le rapport du jury - dont je ne me ferai pas systématiquement l'écho dans ce document - de l'épreuve dont cet exercice est tiré se révèle édifiant : « la justification de la stricte monotonie n'est quasiment jamais correcte (en l'occurrence dérivée négative ne s'annulant qu'en au plus un point) ». Lorsque vous vous entraînez, en deuxième année, sur des annales de concours, prenez le temps, après votre travail, de lire les rapports de jury. Conseil un chouia précoce, mais qui

sera probablement réitéré par vos enseignants...

3) Reprenons la fonction Φ introduite en 2). Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $\Phi'(x) = \lambda e^{\lambda(x-1)} - 1$. Cette fois-ci, avec λ qui n'est plus inférieur à 1, le signe de Φ' risque de ne pas être constant sur $[0 ; 1]$ (on peut aussi s'en douter vu le résultat demandé par l'énoncé). On peut constater notamment : $\Phi'(1) = \lambda - 1 > 0$ et $\Phi'(0) = \lambda e^{-\lambda} - 1 \dots$ Eh mais il me dit quelque chose, lui !

Φ' est dérivable - donc continue - sur $[0 ; 1]$ par composée et somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $\Phi''(x) = \lambda^2 e^{\lambda(x-1)} > 0$.

Φ' est donc strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

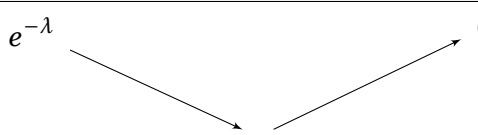
La stricte croissance de Φ' pouvait aussi se justifier, sans la dériver, par composée de fonctions strictement croissantes.

De plus, $\Phi'(0) = \lambda e^{-\lambda} - 1 = g(\lambda) < 0$ d'après 1) Ah, la question 1) est utile finalement...

Et $\Phi'(1) = \lambda - 1 < 0$. Donc : $\Phi'(0) < 0 < \Phi'(1)$

Le corollaire du TVI nous permet d'établir l'existence et l'unicité d'un réel $\alpha \in]0 ; 1[$ tel que $\Phi'(\alpha) = 0$. La stricte croissance de Φ' sur $[0 ; 1]$ nous donne alors le tableau de signe suivant pour $\Phi'(x)$ et, en conséquence, le tableau de variations de Φ :

x	0	α	1
$\Phi'(x)$	-	0	+
Φ	$e^{-\lambda}$		0



Eh oui, un TVI surprise préalable au TVI qu'on attendait, et qu'on va pouvoir maintenant sereinement appliquer à Φ . Sans être dérangés de ne pas connaître précisément $\alpha \dots$

Φ est continue, strictement décroissante sur $[0 ; \alpha]$, et $\Phi(0) = e^{-\lambda} > 0$. Que dire de $\Phi(\alpha)$?

De plus, par stricte croissance de Φ sur $[\alpha ; 1]$, $\Phi(\alpha) < \Phi(1)$. Autrement dit, $\Phi(\alpha) < 0$.

Donc : $\Phi(\alpha) < 0 < \Phi(0)$. Le corollaire du TVI nous permet de conclure que l'équation $\Phi(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0 ; \alpha]$.

En outre, comme $\Phi(1) = 0$ et comme Φ est strictement croissante sur $[\alpha ; 1]$, 1 est l'unique solution de l'équation $\Phi(x) = 0$ sur $] \alpha ; 1]$

Enfin, si $\lambda > 1$, l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions sur $[0 ; 1]$.

Exercice 3

*J'en suis quasi-certain : dans un proche avenir,
l'inégalité 1) pourra vous secourir.*

Énoncé : (temps conseillé : 25 min) (**) d'après concours G2E 2020

Soient a, b, c et d quatre réels strictement positifs.

1) Démontrer que $\ln(x) - x + 1 \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

2) En déduire que : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, a \left(\ln\left(\frac{by}{a}\right) - \frac{by}{a} + 1 \right) \leq d \left(-\ln\left(\frac{cx}{d}\right) + \frac{cx}{d} - 1 \right)$

Remarques sur l'énoncé :

Si E est un ensemble, E^2 est l'ensemble des couples d'éléments appartenant à E .
Autrement dit, E^2 est l'ensemble des (a, b) avec $a \in E$ et $b \in E$.

On note : $E^2 = \{(a, b), a \in E, b \in E\}$.

Dire « $\forall (x, y) \in E^2$ » revient donc à dire « $\forall x \in E, \forall y \in E$ » ou encore « $\forall x, y \in E$ »

Ici, dire « $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ » revient à dire « pour tous réels strictement positifs x et y »

Plus généralement, si E et F sont des ensembles, $E \times F$, appelé produit cartésien de E et F , est l'ensemble des couples (a, b) avec $a \in E$ et $b \in F$.

« Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ » veut donc dire la même chose que « Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ »

Et, dans le cas particulier où E et F sont égaux, $E \times E$ est plus souvent noté E^2 comme ci-haut.

Correction de l'exercice 3 :

1) De même qu'à la première question de l'exercice précédent, déterminer directement le signe de $\ln(x) - x + 1 \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ semble compliqué... Cette fois-ci, la variable x se trouve à la fois à l'intérieur et en dehors de $\ln$. Nous commencerons donc avec une première méthode par étude de fonction, puis nous en présenterons une seconde peut-être plus élégante dans ce genre de situation.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x) - x + 1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme de telles fonctions. De plus : $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, qui est du signe de $1-x$ car $x > 0$

On obtient donc ce tableau de signe pour $f'(x)$, ainsi que le tableau de variations de f :

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
f			0	

D'après ce tableau de variations, f admet un maximum en 1, et ce maximum est $f(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leq 0$. Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) - x + 1 \leq 0$

Notre seconde méthode va utiliser la concavité de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, que nous allons redémontrer rapidement, même si elle fait partie du cours :

La fonction $\ln$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x > 0, \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

$\ln$ est donc concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa courbe représentative est donc en-dessous de sa tangente en n'importe quel $a > 0$. En particulier, la tangente à la courbe de $\ln$ en 1 est la droite T d'équation $y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1)$, avec $\ln(1) = 0$ et $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

T a donc pour équation $y = x - 1$, ce qui nous permet de conclure : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$. Autrement dit, une fois encore : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) - x + 1 \leq 0$

C'est bien gentil cette seconde méthode, mais comment aurions-nous pu penser seuls que derrière $y = x - 1$ se cache une tangente de la courbe de $\ln$? Sans indication de l'énoncé et au sortir de la Terminale, ce n'est pas évident (même si bien connaître la représentation graphique de $\ln$ aide à le visualiser). Mais à force d'expérience, à force de rencontrer

encore et encore ce genre d'inégalité usuelle, l'automatisme s'acquiert.

2) En déduire, c'est le cas de le dire... Il me semble que les deux membres de l'inégalité à établir évoquent lourdement l'inégalité établie en 1).

Pour tous réels strictement positifs x et y : $\frac{cx}{d} > 0$ et $\frac{by}{a} > 0$ car $a, b, c, d > 0$

Donc, d'après 1) : $\ln\left(\frac{by}{a}\right) - \frac{by}{a} + 1 \leq 0$ et $\ln\left(\frac{cx}{d}\right) - \frac{cx}{d} + 1 \leq 0$

Puis, en multipliant respectivement par a et d , tous deux strictement positifs :

$$a\left(\ln\left(\frac{by}{a}\right) - \frac{by}{a} + 1\right) \leq 0 \text{ et } d\left(\ln\left(\frac{cx}{d}\right) - \frac{cx}{d} + 1\right) \leq 0.$$

En passant à l'opposé, $d\left(-\ln\left(\frac{cx}{d}\right) + \frac{cx}{d} - 1\right) \geq 0$

Nous avons donc montré : $a\left(\ln\left(\frac{by}{a}\right) - \frac{by}{a} + 1\right) \leq 0 \leq d\left(-\ln\left(\frac{cx}{d}\right) + \frac{cx}{d} - 1\right)$

Nous avons bien établi : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, a\left(\ln\left(\frac{by}{a}\right) - \frac{by}{a} + 1\right) \leq d\left(-\ln\left(\frac{cx}{d}\right) + \frac{cx}{d} - 1\right)$

Exercice 4

*Très peu d'informations : la suite est implicite ;
jouons de la fonction de manière licite.*

Énoncé : (temps conseillé : 55 min) (***) *d'après oral Agro-Véto 2022*

On étudie dans cet exercice, pour tout entier naturel n non nul, les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $(E_n) : \ln(x) + x = n$
À cet effet, on introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par l'expression $f(x) = \ln(x) + x$

1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , l'équation (E_n) admet une unique solution, notée x_n , puis étudier les variations de la suite (x_n) .

2) Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) < x$

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{2} \leq x_n \leq n$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

4) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{n} = 0$, puis que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$

5) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n$

Remarques sur l'énoncé :

Cet exercice vous fait travailler sur une suite (x_n) que l'on peut qualifier d'implicite : vous n'en aurez ni une expression générale en fonction de n , ni même une relation de récurrence, mais vous allez devoir vous débrouiller avec le peu d'informations que vous avez pour aboutir aux résultats demandés.

Correction de l'exercice 4 :

1) Vous reprendrez bien un petit peu de corollaire du TVI, n'est-ce pas ?

Soit n un entier naturel non nul.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme de telles fonctions. De plus, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, toujours par somme de telles fonctions.

« De telles fonctions » : les fonctions $\ln$ et $x \mapsto x$, toutes deux bien continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$. En constatant que f est somme de deux fonctions strictement croissantes, je nous évite une dérivation dispensable pour obtenir ses variations. Même si elle eût été rapide...

Rappelons qu'en termes de variations, une somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante ne nous aurait pas permis de conclure. Un produit de deux fonctions ne nous aurait pas permis de conclure. Même un produit de deux fonctions croissantes : tenez, faites le produit avec elle-même de la fonction $x \mapsto x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et vous obtenez la fonction carré, certainement pas croissante sur $\mathbb{R}$!)

De plus, par sommes de limites : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Et $n \in]-\infty ; +\infty[$

Le corollaire du TVI nous permet d'établir l'existence et l'unicité d'un réel $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x_n) = n$. Nous avons donc bien établi ce qui suit :

pour tout entier naturel non nul n , l'équation (E_n) admet une unique solution x_n .

Maintenant, comment étudier les variations de cette suite pour laquelle nous ne disposons ni d'une expression générale ni d'une relation de récurrence ? En nous accrochant à la seule information concrète que nous avons sur x_n . Et sur x_{n+1} , en espérant pouvoir comparer les deux...

Pour tout entier naturel non nul n , nous savons : $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n + 1$.

Donc $f(x_n) < f(x_{n+1})$. La stricte croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$ nous permet d'en déduire : $x_n < x_{n+1}$. La suite (x_n) est donc (strictement) croissante.

Ce n'est pas évident de réfléchir à rebours comme ça, en se disant « comparons $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$ (même si, ici, la comparaison tombe de suite), puis déduisons-en une comparaison entre x_n et x_{n+1} grâce à la stricte monotonie de f . J'ai même, une fois encore, fait preuve de méchanceté modérée, en supprimant une indication de l'énoncé d'origine, qui suggérait

précisément de comparer $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$. Mais comme on ne vous le soufflera pas toujours...

« Tu as souligné l'adjectif stricte précédant monotonie, c'est bien parce qu'on voulait passer d'une inégalité stricte entre $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$ à une inégalité stricte entre x_n et x_{n+1} , n'est-ce pas ? Si l'on voulait passer de $f(x_n) \leq f(x_{n+1})$ à $x_n \leq x_{n+1}$, invoquer la croissance de f (et non sa stricte croissance) aurait suffi, c'est bien ça ?

- Non, ce n'est pas bien ça.... Pour passer de $f(a) \leq f(b)$ à $a \leq b$, la croissance large (pas stricte) de f n'est malheureusement pas suffisante. Cette vidéo l'explique plus en détail. J'ai mis le timecode exact vers l'explication qui nous intéresse, mais toute la vidéo, sur un exercice proche du nôtre quant au thème abordé, pourra t'être utile. Et puis, si ce n'est pas déjà fait, ce sera l'occasion de découvrir le concept de la série Où est l'arnaque... »

2) Vous reprendrez bien une petite étude de fonction ? Non ? Dans ce cas, un morceau de concavité peut-être ? Je vous renvoie à la question 1) de l'exercice 3, où nous avons même démontré une inégalité plus exigeante, à savoir : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) - x + 1 \leq 0$, ce qui revient à dire : $\ln(x) \leq x - 1$. Il serait tout à fait légitime, dans cette question-ci, d'en reproduire la preuve - celle par concavité de $\ln$, par exemple - pour enfin conclure que, puisque $x - 1 < x$, l'inégalité $\ln(x) < x$ est bien établie.

Et, même sans l'inspiration de l'exercice 3, l'étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x) - x$ donne un tableau de variations tout à fait similaire à celui obtenu au début de l'exercice 3) (l'expression de la dérivée étant exactement la même), à ceci près que le maximum de f (toujours atteint en 1) serait cette fois-ci -1 , ce qui nous permet de conclure que f est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc d'arriver à l'inégalité demandée.

3) Pour comparer $\frac{n}{2}$, x_n et n comme demandé, comparons leurs images respectives par f , dans le même esprit que notre démonstration de la stricte croissance de (x_n) en 1).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f(x_n) = n$ et $f(n) = \ln(n) + n \geq n$ car $\ln(n) \geq 0$ (car $n \in \mathbb{N}^* \subset [1 ; +\infty[$)
Donc : $f(x_n) \leq f(n)$ puis, par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$: $x_n \leq n$.

Par ailleurs : $f\left(\frac{n}{2}\right) = \ln\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2}$. Et j'aimerais que ce soit inférieur ou égal à n ...

De plus, d'après 2), $\ln\left(\frac{n}{2}\right) < \frac{n}{2}$. Donc : $\ln\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} < \frac{n}{2} + \frac{n}{2}$.

Autrement dit : $f\left(\frac{n}{2}\right) < n = f(x_n)$

La stricte croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$ nous permet cette fois-ci d'établir : $\frac{n}{2} \leq x_n$

Oui, la dernière inégalité pouvait même être stricte, mais vu la question, l'inégalité large suffit.

En conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{2} \leq x_n \leq n$

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} = +\infty$. Par la première inégalité de l'encadrement précédent et par le théorème de comparaison, nous pouvons donc conclure : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} = +\infty$

Attention à ne pas nous balancer le théorème des gendarmes (ou théorème d'encadrement) pour des limites infinies*...

*Je ne parle pas de ce vers quoi n tend, je parle bien du résultat du calcul de limite. Je n'ai pas dit « des limites en l'infini ».

4) Reprenons peut-être l'encadrement obtenu en 3), et voyons quel encadrement nous pouvons en déduire pour $\frac{\ln(x_n)}{n}$...

D'après 3) : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{2} \leq x_n \leq n$.

D'où, par stricte croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$: $\ln\left(\frac{n}{2}\right) \leq \ln(x_n) \leq \ln(n)$

Autrement dit : $\ln(n) - \ln(2) \leq \ln(x_n) \leq \ln(n)$. Puis ($n > 0$) : $\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(2)}{n} \leq \frac{\ln(x_n)}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$

C'est bien, ça, non ? C'est le moment d'appeler les gendarmes, en espérant qu'ils viennent et ne croient pas à un canular, si vous les avez appelés pour rien à la question précédente...

Par croissance comparée : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ Et, par quotient de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2)}{n} = 0$

Il s'ensuit, par sommes de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(2)}{n} = 0$

Le théorème des gendarmes nous permet enfin de conclure : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{n} = 0$

Mais maintenant, que faire pour aboutir à la limite en $+\infty$ de $\frac{x_n}{n}$? D'aucuns pourraient être tentés d'appliquer la fonction exponentielle à $\frac{\ln(x_n)}{n}$, pour ensuite calomnier cette pauvre fonction, en lui inventant des propriétés calculatoires dont elle est parfaitement

innocente... Revenons plutôt à la définition même de x_n , qui fait intervenir la fonction $\ln$.

Pour tout entier naturel n non nul : $\ln(x_n) + x_n = n$. D'où : $\frac{\ln(x_n)}{n} + \frac{x_n}{n} = 1$

Autrement dit : $\frac{x_n}{n} = 1 - \frac{\ln(x_n)}{n}$.

D'après la question précédente, et par somme de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$

5) Une fois encore, rappelons ce que nous savons fondamentalement sur x_n et x_{n+1} ...

Pour tout entier naturel non nul n : $\ln(x_n) + x_n = n$ et $\ln(x_{n+1}) + x_{n+1} = n + 1$

D'où : $x_{n+1} = n + 1 - \ln(x_{n+1})$ et $x_n = n - \ln(x_n)$.

Puis : $x_{n+1} - x_n = n + 1 - \ln(x_{n+1}) - (n - \ln(x_n)) = 1 - \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$

Ah, si seulement nous avions la limite de $\frac{x_{n+1}}{x_n}$... Mais nous pouvons l'obtenir, en faisant apparaître des quotients judicieux !

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_{n+1}}{n+1} \times \frac{n+1}{n} \times \frac{n}{x_n}$ (*)

avec : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{n+1} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{x_n} = 1$ (par quotient, $\frac{n}{x_n}$ étant l'inverse de $\frac{x_n}{n}$)

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$. Donc, par quotient et somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

D'après (*) et par produit de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$

Puis, par continuité de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (et en particulier en 1) :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \ln(1) = 0$. Rappelons enfin : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} - x_n = 1 - \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$

En conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 1$

Cet exercice, qui vous oblige à jongler entre les inégalités et les encadrements adéquats pour parvenir à vos fins en matière de calcul de limites, me fait penser à cet autre exercice corrigé que voici.

Exercice 5

*Notre sport estival requiert force talents :
surfons sur cette vague des équivalents.*

Énoncé : (temps conseillé : 1h 15 min) (****) d'après oral Agro-Véto 2018

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, $v_n \neq 0$, on dit que (u_n) et (v_n) sont équivalentes, et on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, lorsque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. On dit aussi, dans ce cas, que v_n est un équivalent de u_n (ou, ce qui revient au même, que u_n est un équivalent de v_n).

Dans ce problème, on s'intéresse, pour tout entier naturel n non nul, aux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation (E_n) : $\frac{\ln^2(x)}{x} = \frac{1}{n}$

Soit la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par : $\forall x \in [1; +\infty[, f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}$

- 1) Dresser le tableau de variation complet de f sur son ensemble de définition.
- 2) En déduire que l'équation (E_1) n'admet pas de solution sur $[1; +\infty[$.
- 3) Démontrer que, pour $n \geq 2$, l'équation (E_n) admet exactement deux solutions sur $[1; +\infty[$, que l'on notera α_n et β_n , telles que : $1 < \alpha_n < e^2 < \beta_n$
- 4) Démontrer que la suite $(\beta_n)_{n \geq 2}$ est strictement monotone.
- 5) Montrer que $(\beta_n)_{n \geq 2}$ admet une limite que l'on précisera.
- 6) Soit la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par : $u_n = \frac{\beta_n}{n}$. On admet que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} = 0$. Prouver alors que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln^2(n)$, et en déduire un équivalent de β_n .

Remarques sur l'énoncé :

Encore un exercice avec des suites implicites...

La notion de suites équivalentes vous attend l'an prochain, avec une définition un peu plus globale* que celle qu'en donne l'énoncé. Cette dernière correspond à ce que vous ferez souvent en pratique pour établir que deux suites sont équivalentes.

*englobant notamment des situations où l'on n'a pas « $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang »

Enfin, juste au cas où, $\ln^2(x)$ et $(\ln(x))^2$, c'est la même chose.

Correction de l'exercice 5 :

1) f est dérivable sur $[1; +\infty[$ par quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de telles fonctions.

Pour tout réel $x \geq 1$, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x) = \ln^2(x)$ et $v(x) = x$

$$v'(x) = 1 \text{ et } u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)$$

S'obtient, au choix, à partir de la formule $(u^n)' = nu'u^{n-1}$, ou $(uu)' = u'u + uu' = 2u'u$

$$\text{D'où : } \forall x \geq 1, f'(x) = \frac{2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \times x - \ln^2(x) \times 1}{x^2} = \frac{2\ln(x) - \ln^2(x)}{x^2} = \frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x^2}$$

$f'(x)$ est du signe de $2 - \ln(x)$ sur $[1; +\infty[$, car sur cet intervalle, $x^2 > 0$ et $\ln(x) \geq 0$ ($\ln(x)$ ne s'annulant qu'en 1), ce qui annule $f'(x)$ par la même occasion)

$\forall x > 1 : f'(x) \geq 0 \iff 2 - \ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \leq 2 \iff x \leq e^2$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ (de même : $\forall x > 1, f'(x) = 0 \iff x = e^2$)

Nous obtenons donc le tableau de signe de $f'(x)$, ainsi que le tableau de variation de f :

x	1	e^2		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0	-
f	0	$\frac{4}{e^2}$		0

$$f(1) = \frac{\ln^2(1)}{1} = 0 \text{ et } f(e^2) = \frac{\ln^2(e^2)}{e^2} = \frac{(2\ln(e))^2}{e^2} = \frac{(2)^2}{e^2} = \frac{4}{e^2}$$

Enfin, par croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

2) L'équation (E_1) est la suivante : $f(x) = 1$. Or, d'après le tableau de variation obtenu en 1), f admet $\frac{4}{e^2}$ comme maximum sur $[1; +\infty[$. Et $e > 2$ donc, par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, $e^2 > 4$, puis $\frac{4}{e^2} < 1$. Donc : $\forall x \in [1; +\infty[, f(x) \leq \frac{4}{e^2} < 1$

En conclusion, l'équation (E_1) n'admet pas de solution sur $[1; +\infty[$.

3) Soit $n \geq 2$. f est dérivable donc continue sur $[1; e^2]$, et f est strictement croissante sur $[1; e^2]$.

De plus : $f(1) = 0$ et $f(e^2) = \frac{4}{e^2}$. Or, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$

Et ce serait bien de montrer que $\frac{1}{2} \leq \frac{4}{e^2}$, ce qui équivaut à dire : $e^2 \leq 8$

Il est vrai que $e < 3$, mais cette inégalité est trop imprécise pour parvenir à nos fins...

Nous savons : $e \leq 2,8$. Donc $e^2 \leq 2,8^2 = 7,84 < 8$

Puis, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$: $\frac{1}{8} < \frac{1}{e^2}$ et enfin : $\frac{1}{2} = \frac{4}{8} < \frac{4}{e^2}$

D'où : $f(1) < \frac{1}{n} < f(e^2)$

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (TVI) nous permet d'établir l'existence et l'unicité d'un réel α_n de l'intervalle $[1; e^2]$ tel que $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$.

Plus précisément, $\alpha_n \in]1; e^2[$, car nous avons vu précédemment : $f(1) \neq \frac{1}{n}$ et $f(e^2) \neq \frac{1}{n}$

Le corollaire du TVI sur l'intervalle $[e^2; +\infty[$ - intervalle sur lequel f est continue et strictement décroissante, avec $\frac{1}{n}$ toujours strictement compris entre $\frac{4}{e^2}$ et 0 - nous permet, de même, d'établir l'existence et l'unicité d'un réel β_n de l'intervalle $[e^2; +\infty[$ tel que $f(\beta_n) = \frac{1}{n}$. Ce réel appartient plus précisément à l'intervalle $]e^2; +\infty[$

En conclusion, pour tout $n \geq 2$, l'équation (E_n) admet exactement, sur $[1; +\infty[$, deux solutions α_n et β_n , telles que : $1 < \alpha_n < e^2 < \beta_n$.

4) Peut-être que des exercices précédents vous donneront le réflexe, pour pouvoir comparer β_n et β_{n+1} , de passer par la comparaison entre $f(\beta_n)$ et $f(\beta_{n+1})$...

Nous savons : $\forall n \geq 2 : f(\beta_n) = \frac{1}{n}$ et $f(\beta_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$. Donc : $f(\beta_n) > f(\beta_{n+1})$.

Or, f est strictement décroissante sur $[e^2; +\infty[$ (intervalle dans lequel se situent β_n et β_{n+1}). D'où : $\beta_n < \beta_{n+1}$. La suite (β_n) est donc strictement croissante.

Je me permets d'aller plus vite qu'à l'exercice précédent sur cette histoire de « disparaître » f à une inégalité. Revenez ici s'il vous faut plus de précisions.

5) (β_n) étant strictement croissante, soit elle converge vers un certain réel $l \geq e^2$, soit elle diverge vers $+\infty$.

Pourquoi, en cas de convergence, l vérifierait-il $l \geq e^2$? Parce que, pour tout $n \geq 2$, $\beta_n \geq e^2$

et, par passage à la limite, cette inégalité large se conserve.

Nous savons : $\forall n \geq 2, f(\beta_n) = \frac{1}{n}$.

Cette égalité permet déjà voir que $f(\beta_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Mais 0 n'est l'image d'aucun réel l de l'intervalle $[e^2; +\infty[$ par la fonction f ...

Par l'absurde : si (β_n) converge vers un réel $l \in [e^2; +\infty[$, alors, par continuité de f sur $[e^2; +\infty[$: $f(\beta_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(l)$. D'autre part : $f(\beta_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Par unicité de la limite, nous pouvons en déduire : $f(l) = 0$

Mais f est strictement décroissante sur $[e^2; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Donc f est strictement positive sur $[e^2; +\infty[$. Elle ne peut donc pas s'annuler sur cet intervalle, et on ne peut avoir $f(l) = 0$. Absurde.

Par élimination, seule l'autre option indiquée en début de question est possible.

Nous pouvons enfin en conclure : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = +\infty$

6) Pour tout $n \geq 2, \ln^2(n) \neq 0$

On a donc bien, à partir d'un certain rang, $\ln^2(n) \neq 0$, ce qui va nous permettre de nous rapporter à la définition donnée par l'énoncé de deux suites équivalentes.

Et, pour tout $n \geq 2, \frac{u_n}{\ln^2(n)} = \frac{\beta_n}{n \ln^2(n)}$

Certes, mais que faire de cette expression, et à quel moment utiliser le fait admis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} = 0$? N'oublions pas l'info capitale sur β_n ...

Nous savons : $f(\beta_n) = \frac{1}{n}$. Autrement dit : $\frac{\ln^2(\beta_n)}{\beta_n} = \frac{1}{n}$, ou encore : $\frac{\beta_n}{n} = \ln^2(\beta_n)$

Donc : $\frac{u_n}{\ln^2(n)} = \frac{\ln^2(\beta_n)}{\ln^2(n)} = \left(\frac{\ln(\beta_n)}{\ln(n)} \right)^2$

Il suffit donc de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\beta_n)}{\ln(n)} = 1$, et le tour sera joué ! Mais attention à ne pas inventer des propriétés à $\ln$...

Or : $\frac{\ln(\beta_n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(nu_n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(u_n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

$$\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} = 0.$$

$$\text{Donc, par produit de limites : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\beta_n)}{\ln(n)} \right)^2 = 1$$

J'ai dit « par produit de limites » tout simplement parce que le carré d'un nombre est son produit avec lui-même. J'aurais aussi pu invoquer la continuité de la fonction carré sur $\mathbb{R}$, qui permet de passer de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\beta_n)}{\ln(n)} = 1$ à $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\beta_n)}{\ln(n)} \right)^2 = 1^2$

$$\text{Enfin : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln^2(n)} = 1, \text{ ce qui revient à dire : } \boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln^2(n)}$$

Maintenant, l'énoncé nous demande un équivalent de β_n , autrement dit de $\frac{u_n}{n}$. Une quantité, donc, dont le quotient avec $\frac{u_n}{n}$ tendrait vers 1.

Soit, pour tout $n \geq 2$, $v_n = \frac{\ln^2(n)}{n}$. Nous avons bien : $\forall n \geq 2, v_n \neq 0$.

$$\text{De plus : } \frac{\beta_n}{v_n} = \frac{u_n}{n} \times \frac{n}{\ln^2(n)} = \frac{u_n}{\ln^2(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ d'après ce qui précède.}$$

$$\boxed{\text{Un équivalent de } \beta_n \text{ est donc } \frac{\ln^2(n)}{n}}$$

À ce stade de votre apprentissage mathématique, je compte sur votre relative absence de malice pour ne pas détecter une faille de l'énoncé. En toute rigueur, si l'énoncé demande un équivalent de β_n , on peut lui répondre... β_n . Ben oui, β_n est non nul pour tout $n \geq 2$, et $\frac{\beta_n}{\beta_n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$... Pour éviter notamment ce genre de court-circuitage, certains énoncés demandent « un équivalent simple », au sens où l'on attend de l'élève une expression simple en fonction de n . Même si, là encore, les chicaneurs pourraient philosopher longtemps sur la signification de « simple » (*première fois de ma vie que j'emploie ce terme dans un cadre hors Harry Potter).*

Exercice 6

*La voix chargée d'émoi d'un jeune mécontent :
« qu'attendez-vous de moi si le a n'est constant ! »*

Énoncé : (temps conseillé : 50 min) (**) *d'après concours G2E 2021*

1) Soit a une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et soit A une primitive de a sur $\mathbb{R}$.

On considère l'équation différentielle (H) : $y' + a(x)y = 0$.

Démontrer que l'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est $\{y_C : x \mapsto Ce^{-A(x)}, C \in \mathbb{R}\}$

2) On considère l'équation différentielle (E) : $(1 + e^x)y' - y = -\left(\frac{e^x}{1 + e^x}\right)^2$

a) Résoudre l'équation homogène (H) associée à (E), c'est-à-dire (H) : $(1 + e^x)y' - y = 0$

b) Démontrer que $y_p : x \mapsto \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

c) Démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$ est $\{y_\lambda : x \mapsto \frac{e^x}{1 + e^x} \left(\lambda + \frac{1}{1 + e^x} \right), \lambda \in \mathbb{R}\}$

Remarques sur l'énoncé :

Un énoncé qui vous fera probablement penser à pas mal d'exercices-types d'équations différentielles de Terminale, à ceci près que a n'est plus une constante mais une fonction...

Correction de l'exercice 6 :

1) Il s'agit donc de montrer que les solutions de (H) sont exactement les fonctions égales à une constante fois la fonction $y_1 : x \mapsto e^{-A(x)}$

Notons F l'ensemble $\{y_C : x \mapsto Ce^{-A(x)}, C \in \mathbb{R}\}$.

Soit $f \in F$. Par définition : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ce^{-A(x)}$ c'est-à-dire tel que $f = y_C$
C'est quoi ce E à l'envers ? $\exists$ signifie « il existe ». « $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \dots$ » se lit : « il existe un réel C tel que pour tout réel $x, \dots$ »

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée de fonctions dérivables (A étant dérivable sur $\mathbb{R}$ car primitive de a). De plus : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -A'(x) \times Ce^{-A(x)} = -a(x) \times Ce^{-A(x)}$

D'où : $f'(x) = -a(x) \times f(x)$, puis : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + a(x) \times f(x) = 0$.

Autrement dit : f est bien solution de (H) sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, soit f une solution de (H) sur $\mathbb{R}$.

Nous savons donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + a(x) \times f(x) = 0$

Il faut montrer qu'il existe un réel C tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ce^{-A(x)}$. Cela revient à montrer - et ce n'est pas évident d'y penser, à moins d'avoir en tête certaines démos de cours que vous avez pu croiser au lycée sur la fonction exponentielle - que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{e^{-A(x)}}$ est constante sur $\mathbb{R}$... (le dénominateur, strictement positif, ne s'annule pas)

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{f(x)}{e^{-A(x)}} = f(x)e^{A(x)}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée et produit de fonctions dérivables.

Pour tout réel x , $g'(x) = f'(x)e^{A(x)} + f(x) \times A'(x)e^{A(x)} = f'(x)e^{A(x)} + f(x) \times a(x)e^{A(x)}$
 $= (f'(x) + a(x)f(x))e^{A(x)} = 0 \times e^{A(x)} = 0$

g' est donc nulle sur $\mathbb{R}$ et, en conséquence, g est constante sur $\mathbb{R}$. Autrement dit : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = C$, ou encore : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ce^{-A(x)}$. Donc : $f \in F$.

Enfin, l'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est bien $F = \{y_C : x \mapsto Ce^{-A(x)}, C \in \mathbb{R}\}$.

Nous avons en fait démontré l'égalité entre l'ensemble F et l'ensemble des solutions de (H) par double inclusion, en établissant successivement que tout élément de F est solution de (H), puis que toute solution de (H) appartient à F .

Par ailleurs, la manipulation des quantificateurs $\exists$ et $\forall$ me fait en particulier penser à cet exercice.

2)a) Ce serait bien de nous ramener à la forme d'équation différentielle résolue en 1)...

Pour tout réel x , $1 + e^x \neq 0$ (car strictement positif). L'équation (H) est donc équivalente à : $y' - \frac{1}{1+e^x}y = 0$. Autrement dit, (H) : $y' - a(x)y = 0$, en posant $a(x) = \frac{1}{1+e^x}$

Il nous est maintenant possible de résoudre (H), pour peu que l'on connaisse une primitive A de a . Mais comment primitiver une telle expression ? En l'état, elle n'évoque pas une dérivée connue. Mais en la transformant un peu... Ca aurait été sympa qu'il y ait e^x au numérateur...

$$\text{Pour tout réel } x, a(x) = \frac{1}{1+e^x} = \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$$

Oh, voilà qui est bien plus simple à primitiver !

En posant $u : x \mapsto 1 + e^x$, nous avons : $\forall x \in \mathbb{R}, a(x) = 1 - \frac{u'(x)}{u(x)}$

Une primitive de a sur $\mathbb{R}$ est donc $A : x \mapsto x - \ln|u(x)|$

Or : $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) > 0$. Donc $|u(x)| = u(x)$, et donc : $A(x) = x - \ln(1 + e^x)$

Oui, il y a bien une valeur absolue dans votre cours en primitivant $\frac{u'}{u}$...

Ici, son oubli était sans conséquence puisque $u > 0$, mais voici un exemple en vidéo du genre de folie que l'on peut écrire en l'oubliant dans d'autres cas.

D'après 1), les solutions de (H) sont les fonctions y_C de la forme $y_C : x \mapsto Ce^{-A(x)}$

$$\text{Or, pour tout réel } x, e^{-A(x)} = e^{x - \ln(1+e^x)} = \frac{e^x}{e^{\ln(1+e^x)}} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

Enfin, l'ensemble des solutions de (H) est $\left\{ y_C : x \mapsto \frac{Ce^x}{1+e^x}, C \in \mathbb{R} \right\}$

Qu'on pourrait aussi noter, en éventuelle préparation à la suite, $\left\{ y_\lambda : x \mapsto \frac{\lambda e^x}{1+e^x}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

2)b) y_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et quotient - dont le dénominateur ne s'annule pas - de telles fonctions. Pour tout réel x : $y_p(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = (1+e^x)^2$

$$\text{Pour tout réel } x, u'(x) = e^x \text{ et } v'(x) = e^x \times 2 \times (1+e^x) = 2e^x(1+e^x)$$

$$\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R}, y'_p(x) = \frac{e^x \times (1+e^x)^2 - e^x \times 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{2e^{2x}}{(1+e^x)^3}$$

$$\text{Puis, pour tout réel } x : (1+e^x)y'_p(x) - y_p(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{2e^{2x}}{(1+e^x)^2} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(1+e^x) - 2e^{2x} - e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$\text{Par suite : } \forall x \in \mathbb{R}, (1+e^x)y'_p(x) - y_p(x) = \frac{-e^{2x}}{(1+e^x)^2} = -\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)^2.$$

La fonction $y_p : x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ est donc bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2)c) On connaît une solution particulière de l'équation différentielle (E), ainsi que la solution générale de l'équation homogène associée (H). On pourrait être tenté d'utiliser un résultat, vu en Terminale, pour en conclure automatiquement que la solution générale de (E) s'obtient comme somme des deux précédentes. Mais ici, en toute rigueur, du fait que a est non pas une constante mais une fonction, vous n'êtes plus dans le cadre auquel on se limite généralement en Terminale. Même si, par la même mécanique que pour a constante, vous verrez l'an prochain que ce serait tout à fait légitime de conclure ainsi dans notre cas, nous ne sommes pas encore l'an prochain...

Notons G l'ensemble $\{y_\lambda : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}(\lambda + \frac{1}{1+e^x}), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $y_\lambda : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}(\lambda + \frac{1}{1+e^x})$ une fonction de G . Cette fonction est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.

Remarquons : $\forall x \in \mathbb{R}, y_\lambda(x) = \frac{\lambda e^x}{1+e^x} + y_p(x) = y_H(x) + y_p(x)$, où $y_H : x \mapsto \frac{\lambda e^x}{1+e^x}$ est une

solution de (H) d'après 2a (et y_p la solution particulière de (E) exhibée en 2b)

$$\begin{aligned} \text{Dès lors : } \forall x \in \mathbb{R}, (1+e^x)y'_\lambda(x) - y_\lambda(x) &= (1+e^x)y'_\lambda(x) - y_\lambda(x) \\ &= (1+e^x)(y'_H(x) + y'_p(x)) - (y_H(x) + y_p(x)) = (1+e^x)y'_H(x) - y_H(x) + (1+e^x)y'_p(x) - y_p(x) \\ &= 0 - \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)^2 \text{ car } y_H \text{ est solution de (H) et } y_p \text{ est solution de (E).} \end{aligned}$$

$$\text{Nous avons donc établi : } \forall x \in \mathbb{R}, (1+e^x)y'_\lambda(x) - y_\lambda(x) = -\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)^2.$$

Autrement dit : y_λ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, si une fonction f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et,

pour tout réel x , $(1+e^x)f'(x) - f(x) = -\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)^2$.

De plus, nous savons toujours : $\forall x \in \mathbb{R}, (1+e^x)y'_p(x) - y_p(x) = -\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)^2$

En soustrayant l'une de ces égalités à l'autre, nous obtenons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1+e^x)(f'(x) - y'_p(x)) - (f(x) - y_p(x)) = 0, \text{ ou encore : } (1+e^x)(f - y_p)'(x) - (f - y_p)(x) = 0$$

Rappelons que la dérivée de la somme (resp. de la différence) est égale à la somme (resp. la différence) des dérivées, ce qui m'a permis de passer de $f'(x) - y'_p(x)$ à $(f - y_p)'(x)$

Et ce que je note $f - y_p$, c'est tout simplement la fonction qui à tout réel x associe $f(x) - y_p(x)$

La fonction $f - y_p$ est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (H).

Il existe donc, d'après 2a), un réel λ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - y_p(x) = \frac{\lambda e^x}{1+e^x}$.

$$\text{Autrement dit : } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\lambda e^x}{1+e^x} + y_p(x) = \frac{\lambda e^x}{1+e^x} + y_p(x) = \frac{\lambda e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$\text{Ou encore : } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \left(\lambda + \frac{1}{1+e^x} \right). \quad \text{Donc : } \underline{f \in G}.$$

L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est bien $G = \{y_\lambda : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x} \left(\lambda + \frac{1}{1+e^x} \right), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 7

*Un quotient dans une intégrale ?
Souvent plus de peur que de mal.*

Énoncé : (temps conseillé : 25 min) (**) d'après ENS 2018 BCPST

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si et seulement si f est dérivable sur I et f' est continue sur I .

Soit $r \in]0 ; +\infty[$ un nombre réel fixé. On considère une fonction R de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle $y' = y$ et satisfaisant $R(0) = r$.

On considère aussi une fonction continue $A : [0 ; +\infty[\rightarrow]0 ; +\infty[$, satisfaisant $A(0) = 2$,

de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0 ; +\infty[$, vérifiant : $\forall t \in [0 ; +\infty[$, $A'(t) = \frac{-A(t)R(t)}{A(t)+1}$

1) Déterminer l'expression de $R(t)$ en fonction de t et calculer l'intégrale $\int_0^t R(s) \, ds$

2) Déterminer une primitive de la fonction $g : x \mapsto \left(1 + \frac{1}{A(x)}\right)A'(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.

3) En remarquant que $\int_0^t \left(1 + \frac{1}{A(s)}\right)A'(s) \, ds = - \int_0^t R(s) \, ds$, exprimer, pour tout $t \geq 0$,

t en fonction de $A(t)$ et de r .

Remarques sur l'énoncé :

Pour rappel, la notation $f : E \rightarrow F$ pour introduire une fonction f veut juste dire que cette fonction f est définie sur E et à valeurs dans F (c'est-à-dire : $\forall x \in E, f(x) \in F$)
Cette notation seule ne précise pas l'expression de $f(x)$ en fonction de x .

Correction de l'exercice 7 :

1) Une équation différentielle simple, de la forme $y' = ay$, avec $a = 1$

R étant solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = y$, il existe un réel C tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, R(t) = Ce^t$.

De plus, $R(0) = r$, d'où $Ce^0 = r$, et donc : $C = r$. Enfin : $\forall t \in \mathbb{R}, R(t) = re^t$

$$\text{Puis : } \forall t \in \mathbb{R}, \int_0^t R(s) \, ds = \left[R(s) \right]_0^t = R(t) - R(0)$$

$R' = R$, donc R est une primitive d'elle-même. Ca m'a évité, dans le crochet, d'écrire Ce^s à la place de $R(s)$. La belle affaire, je vais devoir le faire ensuite...

$$\text{D'où : } \forall t \in \mathbb{R}, \int_0^t R(s) \, ds = re^t - r = r(e^t - 1) \quad \text{Oui, les questions faciles aussi, ça existe...}$$

2) Pour tout $x \geq 0$, $g(x) = A'(x) + \frac{A'(x)}{A(x)}$ avec $A(x) > 0$ car A est à valeurs dans $]0; +\infty[$

Une primitive de g sur $[0; +\infty[$ est donc la fonction G définie par
 $\forall x \in [0; +\infty[, G(x) = A(x) + \ln(|A(x)|) = A(x) + \ln(A(x))$

3) « En remarquant que... » Pourquoi cette égalité entre intégrales serait-elle vraie ?
Intéressons-nous donc aux intégrandes (fonctions à l'intérieur des intégrales)

$$\text{Par hypothèse, nous savons : } \forall s \in [0; +\infty[, A'(s) = \frac{-A(s)R(s)}{A(s) + 1}.$$

$$\text{D'où : } A'(s)(A(s) + 1) = -A(s)R(s). \text{ Puis (en divisant par } A(s) > 0) : A'(s)\left(1 + \frac{1}{A(s)}\right) = -R(s)$$

Ah, tout s'éclaircit !

$$\text{D'où : } \forall t \geq 0, \int_0^t \left(1 + \frac{1}{A(s)}\right) A'(s) \, ds = \int_0^t -R(s) \, ds = - \int_0^t R(s) \, ds \text{ par linéarité.}$$

$$\text{Donc, d'après 1) : } \int_0^t \left(1 + \frac{1}{A(s)}\right) A'(s) \, ds = -r(e^t - 1) = r(1 - e^t)$$

$$\text{Par ailleurs, d'après 2) : } \int_0^t \left(1 + \frac{1}{A(s)}\right) A'(s) \, ds = \left[A(s) + \ln(A(s)) \right]_0^t$$

$$= A(t) + \ln(A(t)) - A(0) - \ln(A(0)) = A(t) + \ln(A(t)) - 2 - \ln(2)$$

Nous obtenons donc : $\forall t \geq 0, r(1 - e^t) = A(t) + \ln(A(t)) - 2 - \ln(2)$

L'énoncé demande d'exprimer t en fonction de $A(t)$ et de r . Nous y sommes presque, puisque nous sommes en mesure d'exprimer e^t en fonction de $A(t)$ et de r .

Puis (r étant non nul) : $\forall t \geq 0, 1 - e^t = \frac{1}{r} \left(A(t) + \ln(A(t)) - 2 - \ln(2) \right)$

Donc : $e^t = 1 - \frac{1}{r} \left[A(t) + \ln(A(t)) - 2 - \ln(2) \right]$

Nous pouvons enfin conclure : $\forall t \geq 0, t = \ln \left(1 - \frac{1}{r} \left[A(t) + \ln(A(t)) - 2 - \ln(2) \right] \right)$

Exercice 8

Où ces signes Sigma se sont-ils fait la malle ?
Les sommes de Riemann tendent vers l'intégrale

Énoncé : (temps conseillé : 35 min) (***) d'après Agro-Véto 2009 Maths A

On admet que pour tous réels a et b tels que $a < b$, pour toute fonction $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n} \times (b-a)\right) = \int_a^b f(t) dt$

1) Soit f une fonction continue sur $[0 ; 1]$. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)$

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$

2) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

3) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n + \frac{1}{2}u_n = u_{2n}$

4) Démontrer alors que la suite (v_n) converge vers $\frac{1}{2} \ln(2)$.

Remarques sur l'énoncé :

Le résultat admis en début d'énoncé porte sur ce qu'on appelle les sommes de Riemann, dont il établit la convergence.

Rappelons, à toutes fins utiles, que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ se lit « somme pour k allant de 0 à $n-1$ des u_k », et désigne donc tout simplement $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.

Plus généralement, pour $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$, $\sum_{k=p}^n a_k = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$

Voici [un lien vers une playlist de vidéos courtes](#), que je vous conseille vivement de consulter pour vous familiariser avec le signe $\sum$, en particulier si vous ne l'avez pas suffisamment manipulé en Terminale. Certaines manipulations de sommes dans la correction, que vous pourrez certes trouver intuitives sans ce visionnage préalable, vous sembleront plus naturelles après avoir regardé ladite playlist.

Entre autres propriétés intuitives qui vous serviront peut-être pour résoudre ce problème : lorsque C est une constante (indépendante de k), on a : $\sum_{k=0}^n C a_k = C \sum_{k=0}^n a_k$ (linéarité)
C'est une simple factorisation : trivialement, $C a_1 + C a_2 + \dots + C a_n = C(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

La linéarité permet aussi d'écrire $\sum_{k=0}^n a_k + b_k = \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k$

Ajoutons cette précision sur les changements d'indice, qui ne vous sera pas forcément utile directement dans cet exercice : pour $n \geq 1$, la somme $\sum_{k=1}^n u_{k-1}$ est égale à la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

En effet : $\sum_{k=1}^n u_{k-1} = u_{1-1} + u_{2-1} + \dots + u_{n-1} = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

De manière plus formelle, en partant de $\sum_{k=1}^n u_{k-1}$, on pose le changement d'indice $j = k - 1$. Puisque k allait de 1 jusqu'à n , j va de 0 jusqu'à $n - 1$. Et u_{k-1} est remplacé par u_j . On se retrouve donc avec $\sum_{j=0}^{n-1} u_j$, qui n'est autre que $\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

Les variables k et j dans ces deux dernières sommes sont en effet « muettes ». Elles ne sont là que pour indiquer le parcours de l'indice de sommation. De la même manière que $\int_1^2 \ln(t) dt = \int_1^2 \ln(u) du$.

Mais alors pourquoi nous être embêté à poser ce fameux j ? Pour ne pas nous emmêler les pinceaux entre l'ancien et le nouvel indice de sommation.

Plus généralement : pour $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$, et pour q entier, la somme $\sum_{k=p+q}^{n+q} u_k$ est égale à la somme $\sum_{k=p}^n u_{k+q}$.

En effet : $\sum_{k=p+q}^{n+q} u_k = u_{p+q} + u_{p+q+1} + \dots + u_{n+q} = u_{p+q} + u_{(p+1)+q} + \dots + u_{n+q} = \sum_{k=p}^n u_{k+q}$

Ce qui s'obtient en posant le changement d'indice $j = k - q$

Pour plus de précisions sur les changements d'indice, n'hésitez pas à consulter [cette vidéo](#). Oui, oui, encore une vidéo de la playlist dont je vous parle sans arrêt, mais elle est bien, vous verrez.

Correction de l'exercice 8 :

1) Une petite question sympa pour vous mettre en confiance... Il s'agit simplement d'appliquer le résultat admis par l'énoncé, avec un a et un b particuliers.

$$\text{Pour tout entier naturel non nul } n, S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1-0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(0 + \frac{k}{n} \times (1-0)\right)$$

Et f est bien continue sur $[0 ; 1]$ par hypothèse.

$$\text{Donc, d'après le résultat admis (en prenant } a = 0 \text{ et } b = 1) : \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(t) dt$$

2) Tiens, les bornes de la somme correspondent à la situation de la question précédente. Mais j'aurais bien aimé du $\frac{1}{n}$ en facteur devant cette somme....

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \times \frac{1}{\frac{k}{n} + 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{k}{n} + 1} \text{ par linéarité.}$$

$$\text{En posant } f : x \mapsto \frac{1}{x+1}, \text{ nous avons donc : } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

f est bien continue sur $[0 ; 1]$ puisque c'est une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynomiales) dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

$$\text{Puis, d'après 1) : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = \left[\ln(t+1) \right]_0^1 = \ln(2) - \ln(1)$$

Je me suis permis de ne pas écrire $\ln|t+1|$ parce que sur $[0 ; 1]$, $t+1 > 0$

$$\text{Enfin : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(2)$$

3) Une question pas évidente... Gageons que si l'énoncé nous donne l'égalité à démontrer sous cette forme-là, c'est peut-être pour nous aider un peu.

$$\text{Pour tout entier naturel non nul } n, v_n + \frac{1}{2}u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$$

Bon, que faire ? Peut-être, par linéarité, rentrer le $\frac{1}{2}$ en facteur de la seconde somme, histoire de voir ?

$$\text{Donc } v_n + \frac{1}{2}u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+n)}$$

Et maintenant, que faire ? Explicitons peut-être ces sommes, pour y voir plus clair.

$$\begin{aligned} \text{D'où : } v_n + \frac{1}{2}u_n &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)+1} + \dots + \frac{1}{2(2n-1)+1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(1+n)} + \dots + \frac{1}{2(n-1+n)} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{4n-2} \end{aligned}$$

D'une part, $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{4n-1}$ est la somme des inverses de tous les entiers impairs compris (au sens large) entre $2n+1$ et $4n-1$.

D'autre part, $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{4n-2}$ est la somme des inverses de tous les entiers pairs compris (au sens large) entre $2n$ et $4n-2$.

La somme de ces deux sommes est donc la somme des inverses de tous les entiers entre $2n$ et $4n-1$. Autrement dit : $v_n + \frac{1}{2}u_n = \sum_{k=2n}^{4n-1} \frac{1}{k}$

Et j'aimerais que cette somme soit égale à u_{2n} , c'est-à-dire à $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{k+2n}$

Oui, c'est ce qu'on obtient en remplaçant n par $2n$ dans l'expression de u_n .

$$\begin{aligned} \text{Puis : } v_n + \frac{1}{2}u_n &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \dots + \frac{1}{4n-2} = \frac{1}{0+2n} + \frac{1}{1+2n} + \dots + \frac{1}{2n-1+2n} \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{k+2n} = u_{2n} \end{aligned}$$

En conclusion, $\text{pour tout entier naturel non nul } n : v_n + \frac{1}{2}u_n = u_{2n}$

Il était possible, sans l'étape d'explicitation, de passer de $\sum_{k=2n}^{4n-1} \frac{1}{k}$ à $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{k+2n}$ en posant

le changement d'indice $j = k - 2n$ (voir les remarques sur l'énoncé précédant la correction). J'ai préféré une approche plus « terminalo-compatible », en explicitant les sommes.

4) Si l'on ne se laisse pas inutilement impressionner par le $2n$, le calcul qui nous reste

n'est plus qu'une formalité.

Nous avons établi en 3) : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_{2n} - \frac{1}{2}u_n$

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_N = \ln(2)$. Donc, par composée de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \ln(2)$

L'an prochain, vous pourrez dire que, puisque la suite (u_n) converge vers $\ln(2)$, toute suite extraite (ou sous-suite) de (u_n) converge aussi vers $\ln(2)$. En particulier, (u_{2n}) converge vers $\ln(2)$.

Donc, par produit et somme de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln(2) - \frac{1}{2} \times \ln(2)$.

Enfin, (v_n) converge vers $\frac{1}{2} \ln(2)$.

Exercice 9

*S'il a ses dents d'adulte, alors faisons qu'il croque
au fruit non défendu : la trigo réciproque.*

Énoncé : (temps conseillé : 40 min) (***) *d'après concours G2E 2022*

On admet que pour tout réel c appartenant à $[-1 ; 1]$, il existe un unique réel $x \in [0 ; \pi]$ tel que $\cos(x) = c$. Ce réel est noté $\arccos(c)$.

On peut donc définir sur $[-1 ; 1]$ la fonction $\arccos$ qui, à tout réel c de $[-1 ; 1]$, associe le réel $\arccos(c)$ de $[0 ; \pi]$.

1) Calculer $\arccos(0)$, $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\arccos(1)$

2) Soit $c \in [-1 ; 1]$. Quelles sont les solutions de l'équation $\cos(x) = c$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$?

3) On admet que la fonction $\arccos$ est continue sur $[-1 ; 1]$ et dérivable sur $] -1 ; 1[$.
Démontrer que : $\forall x \in] -1 ; 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4) Démontrer que pour tout segment $[a ; b] \subset] -1 ; 1[$:

$$\int_a^b \arccos(x) \, dx = b \arccos(b) - a \arccos(a) + \sqrt{1-a^2} - \sqrt{1-b^2}$$

Remarques sur l'énoncé :

Le corollaire du TVI permet de démontrer le résultat admis par l'énoncé.

En bref : la fonction $\cos$ est continue et strictement décroissante sur $[0 ; \pi]$. De plus, $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$. D'où : $\forall c \in [-1 ; 1], \exists ! x \in [0 ; \pi], \cos(x) = c$

Rappelons que « $\exists$ » signifie « il existe », alors que « $\exists !$ » signifie : « il existe un(e) unique ». Peut-être avez-vous été exposés à ces symboles en Terminale, à l'occasion de la distinction entre le TVI et son corollaire.

Correction de l'exercice 9 :

1) Si l'on revient à la définition donnée par l'énoncé, $\arccos(0)$ est l'unique réel de l'intervalle $[0 ; \pi]$ dont le cosinus vaut 0. Or, $\frac{\pi}{2} \in [0 ; \pi]$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Donc $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$.

C'est bien le fait que $\frac{\pi}{2}$ vérifie ces deux informations « appartient à l'intervalle $[0 ; \pi]$ » et « a un cosinus égal à 0 » qui nous permet de conclure, grâce à l'unicité d'un tel réel, que $\frac{\pi}{2}$ est $\arccos(0)$.

De même : $\frac{\pi}{3} \in [0 ; \pi]$ et $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Donc $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Enfin, $0 \in [0 ; \pi]$ et $\cos(0) = 1$. Donc $\arccos(1) = 0$.

2) Répondre ici « ben cette équation n'a qu'une seule solution et c'est $\arccos(c)$ » serait passer à côté de l'enjeu. $\arccos(c)$ est effectivement une solution de cette équation, et c'est la seule dans l'intervalle $[0 ; \pi]$. Mais il y en a une infinité d'autres ailleurs.

Pour tout réel x : $\cos(x) = c \iff \cos(x) = \cos(\arccos(c))$

Oui, nous avons bien $\cos(\arccos(c)) = c$ puisque par définition, $\arccos(c)$ est un réel dont le cosinus vaut c . Par contre, $\arccos(\cos(x))$ n'est en général pas égal à x . Tenez, par exemple : $\arccos(\cos(2\pi)) = \arccos(1) = 0$. Et, aux dernières nouvelles, 0 n'est pas égal à 2π .

Rappelons ensuite que pour a et b réels :

$$\cos(a) = \cos(b) \iff \left[\exists k \in \mathbb{Z}, a = b + 2k\pi \text{ ou } a = -b + 2k\pi \right] \quad (\mathbb{Z} : \text{ensemble des entiers relatifs})$$

Nous avons donc, pour tous réel x , l'équivalence suivante :

$$\cos(x) = c \iff \left[\exists k \in \mathbb{Z}, x = \arccos(c) + 2k\pi \text{ ou } x = -\arccos(c) + 2k\pi \right]$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions réelles de l'équation $\cos(x) = c$ d'inconnue x est :
 $\left\{ \arccos(c) + 2k\pi, -\arccos(c) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$

Juste une manière plus formelle de désigner l'ensemble des réels qui s'écrivent $\arccos(c) + 2k\pi$ ou $-\arccos(c) + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

3) Hein ? On vient à peine de nous présenter la fonction $\arccos$, on nous fait admettre

dans la foulée qu'elle est dérivable sur $] -1 ; 1[$, et maintenant, il nous faudrait carrément retrouver l'expression de sa dérivée ? Mais comment faire ? En essayant de faire parler une égalité concrète qui lie arccos et une autre fonction que nous savons parfaitement dériver...

Par définition : $\forall x \in] -1 ; 1[$, $\cos(\arccos(x)) = x$

La fonction arccos est dérivable sur $] -1 ; 1[$ et la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$
Intervalle dans lequel se situent trivialement tous les arccos(x).

La fonction $f : x \mapsto \cos(\arccos(x))$ est donc dérivable sur $] -1 ; 1[$ par composée de fonctions dérivables, et nous avons : $\forall x \in] -1 ; 1[$, $f'(x) = \arccos'(x) \times \cos'(\arccos(x))$

Rappelons la formule générale de la dérivée d'une composée de fonctions, lorsque les hypothèses de dérivabilité sont au rendez-vous comme dans notre cas : la dérivée de la fonction $v \circ u : x \mapsto v(u(x))$ est $(v \circ u)' : x \mapsto u'(x) \times v'(u(x))$

Donc : $\forall x \in] -1 ; 1[$, $f'(x) = \arccos'(x) \times (-\sin(\arccos(x))) = -\arccos'(x) \times \sin(\arccos(x))$

Par ailleurs, puisque pour tout $x \in] -1 ; 1[$, $f(x) = x$, nous avons aussi : $f'(x) = 1$

Donc : $\forall x \in] -1 ; 1[$, $-\arccos'(x) \times \sin(\arccos(x)) = 1$

Ah, si seulement nous savions exprimer plus simplement $\sin(\arccos(x))$, nous pourrions isoler $\arccos'(x)$ dans l'équation précédente et obtenir son expression ! À en croire ladite expression à obtenir, il faudrait qu'apparaissent une racine et un carré...

Or : $\forall x \in] -1 ; 1[$, $\sin^2(\arccos(x)) + \cos^2(\arccos(x)) = 1$

Eh oui, pour tout réel θ , $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$. Même si ce réel θ s'appelle arccos(x)...
Rappelons aussi que $\cos^2(\arccos(x))$, c'est tout simplement $(\cos(\arccos(x)))^2$, c-à-d x^2 ...

Donc : $\forall x \in] -1 ; 1[$, $\sin^2(\arccos(x)) + x^2 = 1$, puis $\sin^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$

On a bien envie d'en conclure rapidement $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, mais attention à ne pas oublier un argument important. Rappelons que pour $a \geq 0$, $x^2 = a$ est équivalent à $x = \sqrt{a}$ OU $x = -\sqrt{a}$

De plus, arccos(x) appartient à $[0 ; \pi]$, intervalle sur lequel la fonction sinus est positive.

Donc $\sin(\arccos(x)) \geq 0$ et, par suite : $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

Nous avons donc établi : $\forall x \in]-1 ; 1[, \arccos'(x) \times \sqrt{1-x^2} = -1$
 Et $\sqrt{1-x^2}$ est non nul car strictement positif (car $x \in]-1 ; 1[$).

Enfin : $\forall x \in]-1 ; 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Pour justifier que $\sqrt{1-x^2}$ est non nul, nous aurions aussi pu constater que le produit $\arccos'(x) \times \sqrt{1-x^2}$ est non nul (égal à -1) et donc qu'aucun des facteurs de ce produit ne peut être nul.

4) Soit un segment $[a ; b]$ inclus dans $] - 1 ; 1[$.

Comment obtenir la valeur d'une telle intégrale, et en particulier cette expression ? L'énoncé ne nous donne pas de primitive de arccos, bien que nous sachions la dériver. Eh bien, une intégration par parties peut-être... Et si vous ne voyez pas de produit sous l'intégrale, regardez mieux. Allez, un peu d'imagination...

$$\int_a^b \arccos(x) \, dx = \int_a^b \arccos(x) \times 1 \, dx$$

Nous allons dériver arccos et primitiver la fonction constante $x \mapsto 1$ (et pas le contraire, car si nous savions primitiver arccos, nous aurions calculé l'intégrale directement sans IPP)

Soient u et v définies sur $] - 1 ; 1[$ par $u(x) = \arccos(x)$ et $v(x) = x$.

u et v sont dérivables sur $] - 1 ; 1[$, et leurs dérivées u' et v' définies par $u'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v'(x) = 1$, sont continues sur $] - 1 ; 1[$. En particulier, cela reste valable sur le segment $[a ; b]$, inclus dans $] - 1 ; 1[$.

Pour pouvoir faire une IPP sur ce segment. L'an prochain, pour dire « f est dérivable sur I et f' est continue sur I », vous direz simplement, comme l'énoncé d'un exercice précédent : « f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I »

$$\int_a^b \arccos(x) \, dx = \int_a^b \arccos(x) \times 1 \, dx$$

$$\begin{aligned} \text{Une intégration par parties fournit : } \int_a^b \arccos(x) \, dx &= \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x) \, dx \\ &= \left[x \arccos(x) \right]_a^b - \int_a^b -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = b \arccos(b) - a \arccos(a) + \int_a^b \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \end{aligned}$$

Savons-nous calculer $\int_a^b \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$? Oui : une jolie forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$, à peu de chose près...

Soit la fonction f définie sur $[a; b]$ par $f(x) = 1 - x^2$. f est dérivable sur $[a; b]$, strictement positive sur $[a; b]$, et : $\forall x \in [a; b], f'(x) = -2x$.

$$\text{D'où : } \forall x \in [a; b], \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Juste un signe – qu'il ne faudra pas oublier

Une primitive sur $[a; b]$ de $x \mapsto \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ est la fonction $x \mapsto \sqrt{f(x)}$

Si vous avez plutôt appris qu'une primitive de $x \mapsto \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ est $x \mapsto \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$, cela revient au même à une constante multiplicative près.

Soit dit en passant, le fait que la fonction $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ ait comme dérivée $x \mapsto \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ n'est qu'un cas particulier de la formule générale de la dérivée d'une composée de fonctions, rappelée à la question précédente.

$$\text{Donc : } \int_a^b \arccos(x) dx = b \arccos(b) - a \arccos(a) + \left[-\sqrt{1-x^2} \right]_a^b$$

$$\text{Enfin : } \int_a^b \arccos(x) dx = b \arccos(b) - a \arccos(a) + \sqrt{1-a^2} - \sqrt{1-b^2}$$

Exercice 10

*L'intégrale cernée de valeur absolue
à l'inégalité citée doit son salut*

Énoncé : (temps conseillé : 1h 15 min) (***) *d'après Agro-Véto 2013 Maths A*

On admet l'inégalité triangulaire pour les intégrales : pour tous réels a et b tels que $a \leq b$, pour toute fonction f continue sur $[a ; b]$, $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

La dérivée $n^{\text{ème}}$ d'une fonction f sera notée $f^{(n)}$. En particulier, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction $\cos$ sera donc notée $\cos^{(n)}$. Par convention, $f^{(0)} = f$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. On admet que pour tout entier naturel n , $f^{(n)}$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que pour tout entier naturel $n : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \cos^{(n)}(t) dt$

2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $\frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n dt$.

3) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrer que : $\left| f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1} \right| \leq \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n |\cos^{(n)}(t) - \cos^{(n)}(0)| dt$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+, |\cos^{(n)}(t) - \cos^{(n)}(0)| \leq t$

5) En déduire que, pour tout entier naturel $n : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \left| f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1} \right| \leq \frac{x}{n+2}$

6) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}$

Remarques sur l'énoncé :

La convention $f^{(0)} = f$ ne devrait pas vous choquer. Si vous dérivez f zéro fois, qu'obtenez-vous?

Dans cet exercice cohabitent des puissances et des dérivées $n^{\text{èmes}}$, attention aux confusions.

Enfin, cet exercice nécessite un minimum de maîtrise de la valeur absolue, normalement un prérequis au sortir du lycée mais, d'expérience, objet de pas mal de lacunes. Voici [un lien vers une playlist de vidéos courtes.](#) que je vous conseille vivement de consulter pour pallier d'éventuels manques.

Correction de l'exercice 10 :

1) Qu'est-ce que c'est que cette expression avec une intégrale ? Et, intégrale ou pas, comment pourrions-nous aboutir à l'expression de toutes les dérivées $n^{\text{èmes}}$ de f ? Récurrence.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P_n : \ll \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \cos^{(n)}(t) dt \gg$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , P_n est vraie.

Initialisation : pour tout $x > 0$: d'une part, $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. D'autre part :

$$\frac{1}{x^{0+1}} \int_0^x t^0 \cos^{(0)}(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x \cos(t) dt = \frac{1}{x} \left[\sin(t) \right]_0^x = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x} = \frac{\sin(x)}{x}$$

donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, P_n soit vraie, et montrons que P_{n+1} aussi est vraie.

Supposons donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \cos^{(n)}(t) dt$.

Et montrons : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{x^{n+2}} \int_0^x t^{n+1} \cos^{(n+1)}(t) dt$

L'énoncé nous fait admettre l'existence de $f^{(n+1)}$. Il suffira de dériver $f^{(n)}$ pour y aboutir.

Mais comment dériver $x \mapsto \int_0^x t^n \cos^{(n)}(t) dt$? Peut-être avez-vous vu, l'an dernier, que

pour une fonction g continue sur un intervalle I , pour tout $a \in I$, la fonction $x \mapsto \int_a^x g(t) dt$

est dérivable sur I , et que sa dérivée est la fonction g . Si tel est le cas, vous saurez dériver

$x \mapsto \int_0^x t^n \cos^{(n)}(t) dt$ plus facilement que les autres, en vous servant de ce résultat.

Sinon, même s'il n'est pas évident d'y penser les premières fois, il faut prendre l'initiative de réexprimer l'intégrale $\int_0^x t^n \cos^{(n)}(t) dt$ à l'aide d'une primitive de la fonction intégrée.

C'est ce que je m'apprête à faire ici.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = \int_0^x t^n \cos^{(n)}(t) dt$.

La fonction $g : t \mapsto t^n \cos^{(n)}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive G sur $\mathbb{R}$. Par définition : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = G(x) - G(0)$. Et, puisque G est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée g , h est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée g aussi (la constante $G(0)$ disparaissant lors de la

dérivation).

Plus généralement : si u est une fonction continue sur I et si a appartient à I , alors la fonction $h : x \mapsto \int_a^x u(t) dt$ est dérivable sur I , de dérivée $h' = u$. Même démonstration que dans le cas particulier de cet exercice : comme u est continue sur I , elle admet une primitive U , et on sait alors : $\forall x \in I, h(x) = U(x) - U(a)$. D'où : h est dérivable sur I , et : $\forall x \in I, h'(x) = U'(x) = u(x)$

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \times h(x)$. $f^{(n)}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit de fonctions dérivables, et, pour tout réel x strictement positif : $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$

$$\begin{aligned} &= -\frac{(n+1)x^n}{x^{2n+2}} \times h(x) + \frac{1}{x^{n+1}} \times h'(x) = -\frac{(n+1)}{x^{2n+2-n}} \times \int_0^x t^n \cos^{(n)}(t) dt + \frac{1}{x^{n+1}} \times x^n \cos^{(n)}(x) \\ &= -\frac{n+1}{x^{n+2}} \int_0^x t^n \cos^{(n)}(t) dt + \frac{1}{x} \cos^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+2}} \left(- \int_0^x (n+1)t^n \cos^{(n)}(t) dt + x^{n+1} \cos^{(n)}(x) \right) \end{aligned}$$

Bon.... Que faire après cette dernière factorisation pour aboutir à l'intégrale voulue, à savoir $\frac{1}{x^{n+2}} \int_0^x t^{n+1} \cos^{(n+1)}(t) dt$? Est-ce que l'expression entre parenthèses ne vous fait pas penser à une IPP ?

Les fonctions $u : t \mapsto t^{n+1}$ et $v : t \mapsto \cos^{(n)}(t)$ sont dérivables sur le segment $[0 ; x]$, et leurs dérivées respectives $u' : t \mapsto (n+1)t^n$ et $v' : t \mapsto \cos^{(n+1)}(t)$ sont continues sur $[0 ; x]$.

Une intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned} \int_0^x t^{n+1} \cos^{(n+1)}(t) dt &= \left[t^{n+1} \cos^{(n)}(t) \right]_0^x - \int_0^x (n+1)t^n \cos^{(n)}(t) dt \\ &= x^{n+1} \cos^{(n)}(x) - 0 - \int_0^x (n+1)t^n \cos^{(n)}(t) dt = x^{n+1} \cos^{(n)}(x) - \int_0^x (n+1)t^n \cos^{(n)}(t) dt \end{aligned}$$

0^{n+1} , ça fait bien 0 car $n+1$ est un entier naturel non nul. Attention, avec 0^n , il aurait fallu traiter le cas $n=0$ à part. Par convention, $0^0 = 1$.

Nous avons donc bien établi : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{x^{n+2}} \int_0^x t^{n+1} \cos^{(n+1)}(t) dt$
 P_{n+1} est donc vraie.

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure que pour tout entier naturel n , P_n est vraie. Autrement dit :

pour tout entier naturel n , pour tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \cos^{(n)}(t) dt$

2) Une question bien plus facile que la précédente...

$$\frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n dt = \frac{1}{x^{n+1}} \times \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \frac{1}{x^{n+1}} \times \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} \right). \text{ Donc : } \boxed{\frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n dt = \frac{1}{n+1}}$$

Ok mais à quoi bon ce calcul trivial ? Probablement pour nous faciliter la suite...

3) Comment parvenir à majorer ce $\left| f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1} \right|$ par une expression faisant intervenir une intégrale ? D'accord pour $f^{(n)}(x)$ mais quid de $\frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}$? Ah mais ce $\frac{1}{n+1}$ à peine caché...

$$\left| f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1} \right| = \left| f^{(n)}(x) - \cos^{(n)}(0) \times \frac{1}{n+1} \right|. \text{ Donc, d'après 1) et 2) :}$$

$$\begin{aligned} \left| f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1} \right| &= \left| \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \cos^{(n)}(t) dt - \cos^{(n)}(0) \times \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{x^{n+1}} \left(\int_0^x t^n \cos^{(n)}(t) dt - \cos^{(n)}(0) \times \int_0^x t^n dt \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{x^{n+1}} \left(\int_0^x t^n \cos^{(n)}(t) dt - \int_0^x t^n \cos^{(n)}(0) dt \right) \right| = \left| \frac{1}{x^{n+1}} \left(\int_0^x t^n (\cos^{(n)}(t) - \cos^{(n)}(0)) dt \right) \right| \end{aligned}$$

par linéarité

$$\text{Puis : } \left| f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1} \right| = \frac{1}{x^{n+1}} \times \left| \int_0^x t^n (\cos^{(n)}(t) - \cos^{(n)}(0)) dt \right| \text{ car } \frac{1}{x^{n+1}} > 0$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales donnée par l'énoncé (on a bien $0 \leq x$, les bornes sont dans le « bon sens ») :

$$\left| \int_0^x t^n (\cos^{(n)}(t) - \cos^{(n)}(0)) dt \right| \leq \int_0^x |t^n (\cos^{(n)}(t) - \cos^{(n)}(0))| dt = \int_0^x t^n |\cos^{(n)}(t) - \cos^{(n)}(0)| dt$$

$$\text{Enfin, comme } \frac{1}{x^{n+1}} > 0 : \boxed{\left| f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1} \right| \leq \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n |\cos^{(n)}(t) - \cos^{(n)}(0)| dt}$$

4) La correction qui suit requiert, de la part d'un élève de Terminale, une bonne dose d'imagination. Voir une intégrale là où il n'y en avait pas - on a plus l'habitude de partir d'une intégrale et la calculer pour obtenir une expression sans intégrale - n'est pas du tout évident...

La fonction $\cos^{(n)}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\cos^{(n+1)}$. Donc : $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$|\cos^{(n)}(t) - \cos^{(n)}(0)| = \left| \int_0^t \cos^{(n+1)}(u) du \right| \quad \text{Surtout pas } t \text{ en variable d'intégration ici...}$$

Et $0 \leq t$. D'où, d'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales :

$$|\cos^{(n)}(t) - \cos^{(n)}(0)| \leq \int_0^t |\cos^{(n+1)}(u)| du$$

Or, les dérivées successives de la fonction $\cos$ sont les fonctions $-\sin$, $-\cos$, $\sin$... et $\cos$. *Quatre possibilités uniquement, qui se répètent toutes les quatre dérivations.*

Et ces quatre fonctions renvoient systématiquement des valeurs entre -1 et 1 .

Dans tous les cas : $\forall u \in \mathbb{R}, |\cos^{(n+1)}(u)| \leq 1$. Donc, par croissance de l'intégrale :
(bornes dans le bon sens)

$$\int_0^t |\cos^{(n+1)}(u)| du \leq \int_0^t 1 du = t$$

La variable d'intégration est u , et on a intégré la constante 1 entre 0 et t . Rappelons que pour a, b, K réels, $\int_a^b K du = (b-a)K$ (ce qui se retrouve en primitivant : $[Ku]_a^b = Kb - Ka$)

Nous avons bien établi : $\forall t \in \mathbb{R}_+, |\cos^{(n)}(t) - \cos^{(n)}(0)| \leq t$

L'an prochain, vous pourrez profiter du bel outil que sera l'inégalité des accroissements finis pour établir ce genre de résultat plus rapidement...

$$5) \text{ D'après 3) : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \left| f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1} \right| \leq \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n |\cos^{(n)}(t) - \cos^{(n)}(0)| dt$$

Et d'après 4) : pour tout $t \in [0 ; x]$, $|\cos^{(n)}(t) - \cos^{(n)}(0)| \leq t$

C'est vrai sur $\mathbb{R}_+$ donc en particulier sur $[0 ; x]$

D'où : pour tout $t \in [0 ; x]$, $t^n |\cos^{(n)}(t) - \cos^{(n)}(0)| \leq t^{n+1}$ t^n étant bien positif

Puis, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^x t^n |\cos^{(n)}(t) - \cos^{(n)}(0)| dt \leq \int_0^x t^{n+1} dt \quad \text{Dernière intégrale que nous savons calculer!}$$

$$\text{D'où : } \int_0^x t^n |\cos^{(n)}(t) - \cos^{(n)}(0)| dt \leq \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^x = \frac{x^{n+2}}{n+2} \quad \text{On voit le bout du tunnel...}$$

$$\text{Puis : } \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n |\cos^{(n)}(t) - \cos^{(n)}(0)| dt \leq \frac{1}{x^{n+1}} \times \frac{x^{n+2}}{n+2} = \frac{x}{n+2}$$

Grâce à 3), nous pouvons enfin en déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \left| f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1} \right| \leq \frac{x}{n+2}$

6) Avec tout ce que nous avons vécu, cette question a des allures de formalité. Prêtons juste attention, pour ne pas nous faire piéger, à ce qui est fixé (ici, n) et à ce qui bouge : x , que nous allons faire tendre vers 0 (sous-entendu, « 0^+ » puisque $f^{(n)}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$).

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Je réintroduis ce n par une sorte de « politesse », mais en toute rigueur, je n'ai pas à le faire, puisque l'énoncé le fait dans cette question.

Nous savons, d'après 5) : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq \left| f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1} \right| \leq \frac{x}{n+2}$

« Mais 5) ne nous a pas dit $0 \leq \dots$ - Je sais, mais il me faut bien un second gendarme... »
Une valeur absolue étant toujours positive, l'inégalité ajoutée à gauche est parfaitement légitime.

Or : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{n+2} = 0$ Le $n+2$ est constant, le x du numérateur tend vers 0.

Le théorème des gendarmes nous permet enfin de conclure : $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}$

Exercice 11

*Planchons et traduisons l'impitoyable course
en combat d'équations pour gagner la ressource*

Énoncé : (temps conseillé : 1h 25 min) (****) d'après ENS 2024 BCPST

1) Soit r_1 un réel strictement positif. On considère une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que : $\forall t \geq 0, u'(t) = u(t)(r_1 - u(t))$ et : $\forall t \geq 0, u(t) > 0$.

a) Trouver une équation différentielle satisfaite par la fonction $p = \frac{1}{u}$ et résoudre cette équation.

b) En déduire que : $\forall t \geq 0, u(t) = \frac{u(0)r_1}{r_1 e^{-r_1 t} + u(0)(1 - e^{-r_1 t})}$, puis la limite de u en $+\infty$.

2) Soient maintenant deux réels r_1 et r_2 tels que $r_1 > r_2 > 0$. On considère deux fonctions u et v , définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+$, dont les dérivées u' et v' sont continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall t \geq 0, u(t) > 0, v(t) > 0$ et :

$$\forall t \geq 0, \begin{cases} u'(t) = u(t)(r_1 - u(t) - v(t)) \\ v'(t) = v(t)(r_2 - u(t) - v(t)) \end{cases}$$

Ce système d'équations modélise la dynamique de deux populations de densités u et v , respectivement de taux de croissance r_1 et r_2 , en compétition pour une même ressource.

On définit : $\forall t \geq 0, \rho(t) = u(t) + v(t), f(t) = \exp\left(\int_0^t \rho(s) ds\right), U(t) = u(t)f(t)$ et $V(t) = v(t)f(t)$

a) Montrer que : $\forall t \geq 0, U(t) = u(0)e^{r_1 t}$ et $V(t) = v(0)e^{r_2 t}$.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour tout réel positif t : $f'(t) = \rho(t)f(t)$. En déduire que : $\forall t \geq 0, f(t) = 1 + \frac{e^{r_1 t} - 1}{r_1} u(0) + \frac{e^{r_2 t} - 1}{r_2} v(0)$

c) En déduire $u(t)$ et $v(t)$ en fonction de $r_1, r_2, u(0)$ et $v(0)$. Que remarque-t-on dans le cas où $v(0) = 0$? Déterminer enfin les limites de u et de v en $+\infty$.

Remarques sur l'énoncé :

Une fois encore, « u et v dérivables sur $\mathbb{R}_+$, de dérivées u' et v' continues sur $\mathbb{R}_+$ » aurait pu se dire plus rapidement : « u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ »

Question 2c) : « en fonction de $r_1, r_2, u(0)$ et $v(0)$ » Et en fonction de t , bien entendu.

Correction de l'exercice 11 :

1)a) Trouver une équation différentielle satisfaite par p ? Logiquement, il va falloir faire intervenir p' .

u est dérivable et ne s'annule pas (car strictement positive) sur $\mathbb{R}_+$. Par quotient, p est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et nous avons :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, p'(t) = -\frac{u'(t)}{u^2(t)} = -\frac{u(t)(r_1 - u(t))}{u^2(t)} = -\frac{r_1 - u(t)}{u(t)} = -\frac{r_1}{u(t)} + \frac{u(t)}{u(t)} = -r_1 p(t) + 1$$

p est donc solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle (E) : $y' = -r_1 y + 1$

Cette équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -r_1$ et $b = 1$

Ses solutions sont donc toutes les fonctions de la forme : $t \mapsto Ce^{-r_1 t} + \frac{1}{r_1}$, $C \in \mathbb{R}$

En effet, ici : $Ce^{at} - \frac{b}{a} = Ce^{-r_1 t} + \frac{1}{r_1}$

1)b) D'après 1a), il existe un réel C tel que : $\forall t \geq 0, p(t) = Ce^{-r_1 t} + \frac{1}{r_1} = \frac{r_1 Ce^{-r_1 t} + 1}{r_1}$

Nous savons aussi : $\forall t \geq 0, u(t) = \frac{1}{p(t)} = \frac{r_1}{r_1 Ce^{-r_1 t} + 1}$ p ne s'annulant pas car $p = \frac{1}{u}$

Aïe, on ne voit pas immédiatement le lien avec l'expression demandée... Pas de panique, déterminons déjà C à partir de $u(0)$

$$u(0) = \frac{r_1}{r_1 Ce^{-r_1 \times 0} + 1} = \frac{r_1}{r_1 C + 1} \text{ donc } r_1 C + 1 = \frac{r_1}{u(0)} \text{ puis } r_1 C = \frac{r_1}{u(0)} - 1 = \frac{r_1 - u(0)}{u(0)}$$

En fait, exprimer $r_1 C$ en fonction de $u(0)$ me suffit, pour pouvoir remplacer dans l'expression de $u(t)$. Pas besoin, donc, de m'embêter à exprimer C seul en l'isolant (une simple division par r_1 suffit mais c'est inutile). Pourquoi en parler, alors, si c'est inutile? Parce que mon « déterminons déjà C à partir de $u(0)$ » plus haut sonnait comme une promesse...

$$\text{Donc : } r_1 Ce^{-r_1 t} + 1 = \frac{(r_1 - u(0))e^{-r_1 t}}{u(0)} + 1 = \frac{(r_1 - u(0))e^{-r_1 t} + u(0)}{u(0)}$$

$$\text{Puis : } u(t) = r_1 \times \frac{u(0)}{(r_1 - u(0))e^{-r_1 t} + u(0)}. \text{ Enfin : } \forall t \geq 0, u(t) = \frac{u(0)r_1}{r_1 e^{-r_1 t} + u(0)(1 - e^{-r_1 t})}$$

Reste à déterminer la limite de cette expression lorsque t tend vers $+\infty$. Rien de bien

difficile malgré, peut-être, les apparences. Il y a pas mal de constantes, et il suffit de voir où se situe t dans l'expression.

$r_1 > 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} -r_1 t = -\infty$ Si r_1 avait été négatif, ça aurait tout changé...
 Puis, par composée de limites : $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-r_1 t} = 0$

Enfin, par opérations sur les limites : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(0)r_1}{r_1 e^{-r_1 t} + u(0)(1 - e^{-r_1 t})} = \frac{u(0)r_1}{u(0)}$

« Par opérations sur les limites » pour ne pas dire « par somme, produit, quotient... »

Autrement dit : $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = r_1$

2)a) Comment obtenir de telles expressions de $U(t)$ et de $V(t)$? L'on pourrait être tentés de passer par une dérivation de U comme un produit, pour voir ce que cela donne. Problème : cela passerait par dériver f , et une lecture attentive de l'énoncé en entier nous l'interdit : il faut attendre la question suivante pour cela...

Que faire, donc ? Il va bien falloir utiliser les équations vérifiées par u' et v' dans le système, non ? Si, si...

Pour tout $t \geq 0$, $u'(t) = u(t)(r_1 - u(t) - v(t))$ et $u(t) \neq 0$, donc $\frac{u'(t)}{u(t)} = r_1 - u(t) - v(t)$

Autrement dit : $\forall t \geq 0$, $\frac{u'(t)}{u(t)} = r_1 - \rho(t)$

C'est bien remarquer ce $\rho(t)$ plus ou moins caché.. Mais que faire d'une telle égalité, maintenant ? Peut-être habiller ses membres de belles intégrales...

On peut encore écrire : $\forall s \geq 0$, $\frac{u'(s)}{u(s)} = r_1 - \rho(s)$

Changement de lettre pour pouvoir intégrer entre 0 et t ...

Soit $t \geq 0$. Par somme et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues, les fonctions $s \mapsto \frac{u'(s)}{u(s)}$ et $s \mapsto r_1 - \rho(s)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$, donc en particulier sur $[0 ; t]$.

Rappelons que u' est continue par hypothèse, et que $\rho = u + v$ avec u et v continues.

Donc : $\int_0^t \frac{u'(s)}{u(s)} ds = \int_0^t (r_1 - \rho(s)) ds = \int_0^t r_1 ds - \int_0^t \rho(s) ds$ par linéarité.

u étant strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, nous savons : $\int_0^t \frac{u'(s)}{u(s)} ds = \left[\ln(u(s)) \right]_0^t$

$$= \ln(u(t)) - \ln(u(0)). \text{ D'autre part : } \int_0^t r_1 \, ds - \int_0^t \rho(s) \, ds = r_1 t - \int_0^t \rho(s) \, ds$$

Pour $\int_0^t r_1 \, ds$, j'ai directement en tête le fait que j'intègre d'une constante : nul besoin, donc, de m'occuper de $r_1 t$ à primitiver... Ok je sors. Et, en attendant que je revienne, revenez, vous, ici, si un rappel à ce sujet vous semble nécessaire.

$$\text{À ce stade, nous avons donc établi : } \forall t \geq 0, \ln(u(t)) - \ln(u(0)) = r_1 t - \int_0^t \rho(s) \, ds$$

C'est bien joli, mais que faire de cette égalité ? Ne serions-nous pas en train de dériver loin de l'égalité à établir ? Non, car nous savons maintenant exprimer $\int_0^t \rho(s) \, ds$ en fonction du reste...

$$\text{D'où : } \forall t \geq 0, \int_0^t \rho(s) \, ds = r_1 t - \ln(u(t)) + \ln(u(0)).$$

$$\text{Puis : } f(t) = \exp\left(\int_0^t \rho(s) \, ds\right) = \exp\left(r_1 t - \ln(u(t)) + \ln(u(0))\right) = \frac{e^{r_1 t} \times \exp(\ln(u(0)))}{\exp(\ln(u(t)))}$$

$$\text{Donc } f(t) = e^{r_1 t} \times \frac{u(0)}{u(t)}, \text{ et enfin : } U(t) = u(t) \times f(t) = e^{r_1 t} \times \frac{u(0)}{u(t)} \times u(t)$$

$$\text{Autrement dit : } \boxed{\forall t \geq 0, U(t) = u(0)e^{r_1 t}}$$

En partant cette fois de la seconde égalité du système, à savoir, pour tout t positif, $v'(t) = v(t)(r_2 - u(t) - v(t))$, et en procédant exactement de la même manière (à ceci près que r_1 est remplacé par r_2 , et que nous intégrons $\frac{v'}{v}$ plutôt que $\frac{u'}{u}$), nous obtenons :

$$\boxed{\forall t \geq 0, V(t) = v(0)e^{r_2 t}}$$

Un problème de mathématiques n'est pas une punition avec des lignes à copier. Si un second résultat tombe de la même manière que le premier, avec le même enchaînement à une ou deux lettres près, il est tout à fait légitime de le faire remarquer pour vous faire gagner du temps. Et, en gage de bonne foi, il vaut mieux - comme je l'ai fait ci-haut - mettre en lumière les rares différences avec ce qui précède. Bien sûr, votre correcteur vous attend au tournant si vous tentez de lui faire passer pour identiques des raisonnements qui ne le sont pas sur le fond, ou si vous passez à côté d'une nuance utile...

2)b) ρ étant continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $R : t \mapsto \int_0^t \rho(s) \, ds$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et $R' = \rho$.

Cette fois-ci, je vais un peu plus vite sur ce point, à la lisière du cours de Terminale, et qui fera partie intégrante de votre cours de l'an prochain. Revenez ici s'il vous faut revoir une démonstration plus détaillée de la dérivabilité ainsi que de la dérivée.

De plus, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par composée, la fonction f est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall t \geq 0, f'(t) = R'(t) \times \exp(R(t))$

Donc : $\boxed{\forall t \geq 0, f'(t) = \rho(t)f(t)}$

Comment, de ce résultat sur f' , déduire une telle expression de f ? Et si nous tentions de dériver l'expression que nous sommes censés obtenir, celle du membre de droite de l'égalité demandée par l'énoncé...

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(t) = 1 + \frac{e^{r_1 t} - 1}{r_1} u(0) + \frac{e^{r_2 t} - 1}{r_2} v(0)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par composée et somme de fonctions dérivables. De plus :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, g'(t) = \frac{r_1 e^{r_1 t}}{r_1} u(0) + \frac{r_2 e^{r_2 t}}{r_2} v(0) = e^{r_1 t} u(0) + e^{r_2 t} v(0)$$

J'espère que vous ne m'avez pas dérivé ça comme des quotients de fonctions... r_1 et r_2 sont de pauvres constantes.

L'expression que je viens d'obtenir.. Mais... Elle me dit quelque chose !

Nous savons donc, d'après 2a) : $\forall t \geq 0, g'(t) = U(t) + V(t)$

D'où : $\forall t \geq 0, g'(t) = u(t)f(t) + v(t)f(t) = (u(t) + v(t))f(t) = \rho(t)f(t)$

Ce qui, entre autres, rend cet exercice particulièrement difficile, ce sont toutes ces fonctions, et tous ces liens entre elles, à en perdre la tête.

Par suite : $\forall t \geq 0, f'(t) = g'(t)$. f et g sont donc deux primitives d'une même fonction et, en conséquence, elles sont égales à une constante additive près.

Autrement dit, il existe un réel C tel que : $\forall t \geq 0, f(t) = g(t) + C$

Pour rappel, si on n'a plus ce résultat en tête, il se retrouve facilement en constatant que la fonction $f' - g'$, qui est aussi la fonction $(f - g)'$, est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, et

donc que la fonction $f - g$ est constante sur cet intervalle. Maintenant, ce serait bien, pour aboutir au résultat demandé, que C soit nul, mais comment le déterminer ?

En particulier : $f(0) = g(0) + C$. Or, d'une part : $f(0) = \exp\left(\int_0^0 \rho(s) ds\right) = \exp(0) = 1$.

Et, d'autre part : $g(0) = 1 + \frac{e^0 - 1}{r_1}u(0) + \frac{e^0 - 1}{r_2}v(0) = 1 + 0 + 0 = 1$.

Donc : $1 = C + 1$, c'est-à-dire : $C = 0$, ce qui entraîne : $f = g$.

Nous avons donc bien établi : $\forall t \geq 0, f(t) = 1 + \frac{e^{r_1 t} - 1}{r_1}u(0) + \frac{e^{r_2 t} - 1}{r_2}v(0)$

2)c) La définition de U et le résultat de 2a) donnent l'égalité suivante :

$$\forall t \geq 0, u(t)f(t) = u(0)e^{r_1 t}$$

Et nous aimerions isoler $u(t)$. L'expression de $f(t)$ en fonction des données du problème est désormais maintenant connue grâce à 2b)...

$u(0) > 0$ par hypothèse, et $e^{r_1 t} > 0$. Donc, pour tout $t \geq 0$, $u(0)e^{r_1 t} \neq 0$.

D'où, pour tout $t \geq 0$, $f(t) \neq 0$ Sinon, $u(t)f(t)$ s'annulerait, et donc $u(0)e^{r_1 t}$ aussi.

Nous pouvons donc écrire : $\forall t \geq 0, u(t) = \frac{u(0)e^{r_1 t}}{f(t)}$

$$\text{Pour tout } t \geq 0 : f(t) = 1 + \frac{e^{r_1 t} - 1}{r_1}u(0) + \frac{e^{r_2 t} - 1}{r_2}v(0) = \frac{r_1 r_2 + r_2(e^{r_1 t} - 1)u(0) + r_1(e^{r_2 t} - 1)v(0)}{r_1 r_2}$$

Histoire de mettre ça sous une forme assez pratique pour l'inverser.

$$\text{Donc : } \forall t \geq 0, u(t) = u(0)e^{r_1 t} \times \frac{r_1 r_2}{r_1 r_2 + r_2(e^{r_1 t} - 1)u(0) + r_1(e^{r_2 t} - 1)v(0)}$$

Ensuite, en partant cette fois de la définition de V , et en procédant de la même manière, nous pouvons aussi écrire : $\forall t \geq 0, v(t) = \frac{v(0)e^{r_2 t}}{f(t)}$. Enfin, en reprenant l'expression de $f(t)$ obtenue plus haut :

$$\forall t \geq 0, v(t) = v(0)e^{r_2 t} \times \frac{r_1 r_2}{r_1 r_2 + r_2(e^{r_1 t} - 1)u(0) + r_1(e^{r_2 t} - 1)v(0)}$$

Dans le cas où $v(0) = 0$, l'expression de $u(t)$ devient la suivante : $\forall t \geq 0$,

$$u(t) = u(0)e^{r_1 t} \times \frac{r_1 r_2}{r_1 r_2 + r_2(e^{r_1 t} - 1)u(0)} = \frac{u(0)r_1 e^{r_1 t}}{r_1 + (e^{r_1 t} - 1)u(0)} \text{ en simplifiant par } r_2$$

Puis, en multipliant numérateur et dénominateur par $e^{-r_1 t}$: $u(t) = \frac{u(0)r_1}{r_1 e^{-r_1 t} + u(0)(1 - e^{-r_1 t})}$

On reconnaît alors - si l'on s'en souvient.. - l'expression obtenue en 1b), c'est-à-dire dans le cas d'une seule population de taux de croissance r_1 , dont nous étudions l'évolution de la densité $u(t)$ en fonction du temps t . La seconde population est initialement absente avec la condition $v(0) = 0$, et elle le reste bien car v reste nulle si $v(0) = 0$ (cf expression de $v(t)$).

À la question 1), l'énoncé n'a pas donné d'interprétation de u et r_1 . Nous nous sommes donc servi de son interprétation de la 2) pour la retrouver. Enfin, même si l'énoncé ne le précise pas explicitement, t représente bien le temps. Il le sous-entend timidement en parlant de « dynamique de populations », autrement dit de l'évolution dans le temps de ces populations. Ce qui semblera peut-être plus naturel à des élèves aguerris de BCPST qu'aux jeunes Terminale assez courageux pour attaquer ce document.

Allez, finissons-en, et calculons les limites demandées. Nos expressions encadrées de $u(t)$ et de $v(t)$ ne sont pas les plus adaptées pour cela, vu qu'elles mènent à des formes indéterminées. Eh bien, multiplions numérateur et dénominateur par $e^{-r_1 t}$ dans l'expression de $u(t)$, et par $e^{-r_2 t}$ dans l'expression de $v(t)$

$$\text{Nous avons : } \forall t \geq 0, u(t) = \frac{u(0)r_1 r_2}{r_1 r_2 e^{-r_1 t} + r_2 (1 - e^{-r_1 t})u(0) + r_1 (e^{(r_2 - r_1)t} - e^{-r_1 t})v(0)}$$

$$\text{et : } \forall t \geq 0, v(t) = \frac{v(0)r_1 r_2}{r_1 r_2 e^{-r_2 t} + r_2 (e^{(r_2 - r_1)t} - e^{-r_1 t})u(0) + r_1 (1 - e^{-r_2 t})v(0)}$$

Pour calculer les limites de ces expressions lorsque t tend vers $+\infty$, il suffit de remarquer que $-r_1$, $-r_2$, et $r_1 - r_2$ sont strictement négatifs (le troisième car $r_1 > r_2$ par hypothèse). Donc $-r_1 t$, $-r_2 t$ et $(r_2 - r_1)t$ tendent tous trois vers $-\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$. Puis, par composée de limites : $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-r_1 t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-r_2 t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(r_2 - r_1)t} = 0$

D'où, par somme, produit et quotient de limites :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \frac{u(0)r_1 r_2}{r_2 u(0)} \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{v(0)r_1 r_2}{r_1 v(0)}. \text{ Enfin : } \boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = r_1 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0}$$

Suivant ce modèle, la population avec le plus faible taux de croissance est vouée à l'extinction.

Exercice 12

*Les sommes qu'on ne sait pas calculer
à l'intégration peuvent acculer*

Énoncé : (temps conseillé : 1h 15 min) (****) d'après Agro-Véto 2016 CR

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, $v_n \neq 0$, on dit que (u_n) et (v_n) sont équivalentes, et on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, lorsque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

1) On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k}$

a) Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

b) En déduire que, pour tout entier $k \geq 4$, on a : $\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx$

c) En déduire l'existence de trois constantes réelles positives A , B et C telles que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on ait :

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - C$$

d) En déduire la limite de la suite (S_n) .

2) Montrer que : $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$

3) Soit la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}$

a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} - u_n \leq 0$

b) En déduire que la suite u converge.

Remarques sur l'énoncé :

Oui, la définition de suites équivalentes en début d'énoncé est un copier-coller du début de l'exercice 5. Et, oui, au cas où vous ne l'auriez pas encore consultée, je vais encore vous remettre [un lien vers la playlist Démystifier \$\Sigma\$...](#)

Correction de l'exercice 12 :

1)a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par quotient - dont le dénominateur ne s'annule pas - de fonctions dérivables. Et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$
 $f'(x)$ est donc du signe de $1 - \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x > 0 : f'(x) \geq 0 \iff 1 - \ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \leq 1 \iff x \leq e$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ (de même : $\forall x > 0, f'(x) = 0 \iff x = e$)

On obtient donc ce tableau de signe pour $f'(x)$, ainsi que le tableau de variations de f :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
f		e^{-1}	0

$-\infty \nearrow \quad \searrow 0$

$f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e} = e^{-1}$. Par quotient de limites : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$

Pas de forme indéterminée ici, c'est du « $\frac{-\infty}{0^+}$ »

Et, par croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

L'énoncé n'a pas précisé « tableau de variations complet » mais ça ne mangeait pas de pain, alors ...

1)b) Comment obtenir un tel encadrement ? Pourquoi à partir de 4 ? Et pourquoi « en déduire » ? Si les variations de f sont censées nous servir, la croissance de l'intégrale n'est probablement pas loin. Mais sur quel segment ? Dites plutôt « quels » au pluriel. Ah bon, on peut appliquer la croissance de l'intégrale à des segments différents ? Non, mais rien ne vous oblige à établir l'encadrement demandé d'une traite, vous pouvez le casser en deux..

Soit k un entier supérieur ou égal à 4. Comme $e < 3$, le segment $[k ; k + 1]$ est inclus dans $[e ; +\infty[$, intervalle sur lequel f est décroissante.

Donc : $\forall x \in [k ; k + 1], f(x) \leq f(k)$, c'est-à-dire : $\frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{\ln(k)}{k}$. Puis, par croissance de l'intégrale : $\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln(k)}{k} dx$. Autrement dit : $\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq (k+1-k) \times \frac{\ln(k)}{k}$
 $\frac{\ln(k)}{k}$ est en effet une constante vis-à-vis de la variable d'intégration x .

Donc :
$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k}$$

Pourquoi n'avoir gardé, sur le segment $[k ; k + 1]$, que $f(x) \leq f(k)$, et pas $f(k + 1) \leq f(x)$? Parce que c'est la première inégalité qui me servait dans le contexte ; c'est elle qui, en l'intégrant, me donne un morceau de l'encadrement à démontrer.

De même, puisque $k \geq 4$, $k - 1 \geq 3$, et le segment $[k - 1 ; k]$ est aussi inclus dans $[e ; +\infty[$. Par décroissance de f sur $[k - 1 ; k]$:

$\forall x \in [k - 1 ; k], f(k) \leq f(x)$, c'est-à-dire : $\forall x \in [k - 1 ; k], \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(x)}{x}$

Par croissance de l'intégrale : $\int_{k-1}^k \frac{\ln(k)}{k} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx$

Autrement dit :
$$\frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx$$

Nous avons bien établi :
$$\forall k \geq 4, \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx$$

1)c) Il faudrait faire intervenir S_n , maintenant. En sommant membre à membre l'encadrement précédent, S_n semble pouvoir apparaître au milieu.. Mais attention ! L'encadrement précédent n'est valable que pour les entiers k à partir de 4, alors que S_n est la somme de 1 à n des $\frac{\ln(k)}{k}$...

Soit un entier naturel n supérieur ou égal à 4. D'après 1)b) :

$$\sum_{k=4}^n \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \sum_{k=4}^n \frac{\ln(k)}{k} \leq \sum_{k=4}^n \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx$$
 Sommer à partir de 4, on peut

Or :
$$\sum_{k=4}^n \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx = \int_4^5 \frac{\ln(x)}{x} dx + \int_5^6 \frac{\ln(x)}{x} dx + \dots + \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx = \int_4^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx$$

d'après la relation de Chasles « en cascade »

Et :
$$\sum_{k=4}^n \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx = \int_3^4 \frac{\ln(x)}{x} dx + \int_4^5 \frac{\ln(x)}{x} dx + \dots + \int_{n-1}^n \frac{\ln(x)}{x} dx = \int_3^n \frac{\ln(x)}{x} dx$$

Donc :
$$\int_4^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \sum_{k=4}^n \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_3^n \frac{\ln(x)}{x} dx$$

Si vous les regardez bien, nous sommes en mesure de calculer les intégrales de gauche et

de droite, mais le membre du milieu n'est pas tout à fait S_n . C'est S_n à qui on a retranché les trois premiers termes...

$$\sum_{k=4}^n \frac{\ln(k)}{k} = S_n - \sum_{k=1}^3 \frac{\ln(k)}{k} = S_n - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(3)}{3} \quad \text{Où est } \frac{\ln(1)}{1} ? \text{ Ben, il est nul.}$$

Par ailleurs, remarquons : $\forall x > 0$, $\frac{\ln(x)}{x} = \ln(x) \times \frac{1}{x} = \ln(x) \times \ln'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times \ln(x) \times \ln'(x)$

Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est donc $F : x \mapsto \frac{1}{2} \times \ln^2(x)$

$$\text{D'où : } \int_4^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\frac{\ln^2(x)}{2} \right]_4^{n+1} = \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(4)}{2} \text{ et } \int_3^n \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2}$$

L'encadrement obtenu précédemment se réécrit donc :

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(4)}{2} \leq S_n - \sum_{k=1}^3 \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2}.$$

En posant $A = \frac{\ln^2(4)}{2} \geq 0$, $B = \sum_{k=1}^3 \frac{\ln(k)}{k} \geq 0$, et $C = \frac{\ln^2(3)}{2} \geq 0$, nous avons établi :

$$\forall n \geq 4, \frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - C$$

1)d) Rien ne nous interdit de garder de l'encadrement précédent que la partie qui nous intéresse...

$$\text{D'après 1c) : } \forall n \geq 4, \frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B. \text{ Ou encore : } \frac{\ln^2(n+1)}{2} - A + B \leq S_n$$

$$\text{Or, par composée et somme de limites : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{2} - A + B = +\infty$$

Donc, par théorème de comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

Laissez le théorème des gendarmes tranquille, il ne vous servira jamais à prouver qu'une limite est infinie...

2) Pour tout entier $n \geq 2$, $\ln(n) \neq 0$ donc $\ln^2(n) \neq 0$. Montrons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\frac{\ln^2(n)}{2}} = 1$

Autrement dit, montrons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2S_n}{\ln^2(n)} = 1$

$$\text{D'après 1c) : } \forall n \geq 4, \frac{\ln^2(n+1)}{2} - A + B \leq S_n \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - C + B. \text{ Puis, comme } \ln^2(n) > 0 :$$

$$\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} + \frac{2(B-A)}{\ln^2(n)} \leq \frac{2S_n}{\ln^2(n)} \leq 1 + \frac{2(B-C)}{\ln^2(n)} \quad (*)$$

Attention aux signes sur A , B et C . J'ai failli me faire avoir - et vous arnaquer - en vous écrivant : $\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} - \frac{2(A+B)}{\ln^2(n)} \leq \frac{S_n}{\ln^2(n)} \leq \frac{1}{2} - \frac{2(C+B)}{\ln^2(n)}$. Oui, c'est faux, vérifiez les signes...

Maintenant, on sent bien que le théorème des gendarmes va nous servir, mais la seule limite un peu problématique est celle de $\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)}$... Et si elle vous fait repenser à la question 6 de l'exercice 5, c'est normal...

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \geq 4, \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} &= \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \\ &= 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}. \end{aligned}$$

Or, par continuité de $\ln$ en 1 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$.

Donc, par quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$. Puis : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^2 = 1^2 = 1$

Par continuité de la fonction carré en 1 ou, tout simplement, par produit de limites.

C'est-à-dire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} = 1$.

Par ailleurs : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(B-A)}{\ln^2(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(B-C)}{\ln^2(n)} = 0$ $2(B-A)$ et $2(B-C)$ sont constantes.

Puis : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} + \frac{2(B-A)}{\ln^2(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2(B-C)}{\ln^2(n)} = 1$

À partir de (*), le théorème des gendarmes nous permet de conclure : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2S_n}{\ln^2(n)} = 1$

Enfin : $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$

$$\begin{aligned} 3)a) \text{ Pour tout } n \geq 3 : u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \left(S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}\right) \\ &= S_{n+1} - S_n - \frac{\ln^2(n+1)}{2} + \frac{\ln^2(n)}{2} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln^2(n+1)}{2} + \frac{\ln^2(n)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln^2(n+1)}{2} + \frac{\ln^2(n)}{2}$$

Et là, quelle galère pour obtenir le signe... On pourrait être tenté de tout mettre sur le même dénominateur et s'intéresser au signe du numérateur, mais son signe n'est pas plus simple...

C'est un peu méchant de ma part de n'avoir donné aucune indication - j'ai hésité - mais ça rend la question plus « rigolote ». J'attendais de l'élève que ces $\frac{\ln^2(n)}{2}$ et $\frac{\ln^2(n+1)}{2}$ lui rappellent quelque chose...

Nous avons établi en 1c) qu'une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est la fonction $F : x \mapsto \frac{\ln^2(x)}{2}$. Et nous savons : $\forall n \geq 3, u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - F(n+1) + F(n)$

$$\text{D'où : } u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - (F(n+1) - F(n)) = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx$$

$$\text{Or, d'après 1b), comme } n+1 \geq 4 \text{ (car } n \geq 3) : \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

C'est l'inégalité de droite de l'encadré rouge de la fin de 1 b), en prenant $k = n+1$

$$\text{D'où : } \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx - \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq 0. \text{ Donc : } \boxed{\forall n \geq 3, u_{n+1} - u_n \leq 0}$$

3)b) La suite (u_n) est donc décroissante à partir du rang 3.

Ce serait sympa qu'elle soit minorée...

$$\text{Pour tout } n \geq 3, u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}. \text{ Or, d'après 1c) : } \forall n \geq 4, \frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B$$

$$\text{Donc : } -A + B \leq S_n - \frac{\ln^2(n+1)}{2}.$$

Par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+ : \ln^2(n) < \ln^2(n+1)$

$$\text{Il s'ensuit : } S_n - \frac{\ln^2(n+1)}{2} \leq S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}, \text{ et donc : } -A + B \leq S_n - \frac{\ln^2(n)}{2} = u_n$$

La suite (u_n) est donc minorée.

Le théorème de convergence monotone nous permet enfin de conclure que $\boxed{(u_n) \text{ converge.}}$

Exercice 13

*En voyant P certains plus âgés diront : « ciel !
Mon pauvre tu n'es qu'un début d'exponentielle. »*

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure) (****) d'après ENS 2018 BCPST

On rappelle l'inégalité triangulaire : $\forall a, b \in \mathbb{R}, |a + b| \leq |a| + |b|$.

Rappelons que par convention : $0^0 = 1$ et $0! = 1$

On se fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on définit le polynôme P et la fonction f par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \text{ et } f(x) = e^x \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt$$

1) Trouver une équation différentielle satisfaite par $g = P + f$ et la résoudre.

2) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in [-1; 1]$, on ait :
 $|f(x)| \leq C|x|^{n+1}$

3) Soit un entier naturel $N > n$, et soient $N + 1$ réels $a_0, a_1, \dots, a_N$. Soit la fonction polynôme Q définie par $Q(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$

On suppose qu'il existe une constante $D > 0$ telle que pour tout $x \in [-1; 1]$, on ait :
 $|Q(x)| \leq D|x|^{n+1}$. Montrer que tous les coefficients a_k pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ sont nuls.

On pourra raisonner par l'absurde, noter k_0 le plus petit indice k tel que $a_k \neq 0$ et calculer la limite en 0 de $\frac{Q(x)}{x^{k_0}}$

4) En exprimant $P(x)$ et $P(-x)$ grâce à 1) et en utilisant les questions 2) et 3), montrer qu'il existe une fonction polynôme R telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)P(-x) = 1 + x^{n+1}R(x)$

Remarques sur l'énoncé :

L'inégalité triangulaire rappelée en début d'énoncé se généralise à une somme de plusieurs termes : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{R}, |a_1 + a_2 + \dots + a_N| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_N|$.
Autrement dit : $\left| \sum_{k=1}^N a_k \right| \leq \sum_{k=1}^N |a_k|$. Cela s'obtient, à partir de l'inégalité triangulaire classique, par récurrence.

$\llbracket 0; n \rrbracket$ est l'ensemble des entiers de 0 à n , 0 et n compris.

Correction de l'exercice 13 :

1) D'une part, P est une fonction polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Nous allons dériver cette somme terme à terme (la dérivée de la somme étant égale à la somme des dérivées), en remarquant que le terme d'indice $k = 0$, à savoir $\frac{x^0}{0!} = 1$, est constant. Il va donc disparaître en dérivant. n étant supérieur ou égal à 1, nous avons l'assurance qu'il restera au moins un terme dans la somme même après cette disparition.

$$\text{Pour tout réel } x, P'(x) = \sum_{k=1}^n \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{kx^{k-1}}{(k-1)! \times k} = \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\text{Le changement d'indice } j = k - 1 \text{ donne : } P'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!}, \text{ c'est-à-dire : } P'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

$$\text{Moins formel : } \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{x^{1-1}}{(1-1)!} + \frac{x^{2-1}}{(2-1)!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Revenez ici si un rappel sur les changements d'indice vous semble de circonstance (et que vous ne vous êtes toujours pas décidé à aller regarder la playlist Démystifier Σ)

D'autre part, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit de la fonction exponentielle, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, et de la fonction $g : x \mapsto \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt$, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g' : x \mapsto \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ (la fonction $t \mapsto \frac{t^n}{n!} e^{-t}$ étant bien continue sur $\mathbb{R}$)

Revenez ici s'il vous faut revoir une démonstration plus détaillée de la dérivabilité des fonctions de la même forme que g ainsi que de leur dérivée.

$$\text{Pour tout réel } x, f'(x) = e^x \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt + e^x \times \frac{x^n}{n!} e^{-x} = f(x) + \frac{x^n}{n!}$$

Par somme, la fonction g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = P'(x) + f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + f(x) + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + f(x) = P(x) + f(x)$$

$\frac{x^n}{n!}$ est allé rejoindre la somme, dont il peut être vu comme le terme d'indice n .

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = g(x)$. g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' = y$

Cette équation différentielle est de la forme $y' = ay$ avec $a = 1$

Ses solutions sont donc toutes les fonctions de la forme : $x \mapsto Ke^x$, $K \in \mathbb{R}$

2) Pour tout $x \in [-1 ; 1]$, $|f(x)| = \left| e^x \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt \right| = e^x \times \left| \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt \right|$ car $e^x > 0$

Et là, on pourrait être tenté de se dire : faisons sauter cette valeur absolue autour de l'intégrale, puisqu'en tant qu'intégrale d'une fonction positive, elle est positive. Ce serait mal lire l'énoncé ! x peut très bien être négatif... Faisons donc proprement une disjonction de cas.

- Si $x \in [0 ; 1]$, la fonction $t \mapsto \frac{t^n}{n!} e^{-t}$ est positive sur $[0 ; x]$, et donc : $\int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt \geq 0$

Les bornes sont bien dans le sens croissant.

D'où : $|f(x)| = e^x \times \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt$ Et maintenant, comment majorer ça par du Cx^{n+1} ?

Par linéarité : $|f(x)| = \frac{e^x}{n!} \times \int_0^x t^n e^{-t} dt$.

Et, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, pour tout $t \in [0 ; x]$, $e^{-t} \leq e^0 = 1$

Donc (comme $t^n \geq 0$) : $t^n e^{-t} \leq t^n$.

Puis, par croissance de l'intégrale : $\int_0^x t^n e^{-t} dt \leq \int_0^x t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1} - 0$

D'où (puisque $\frac{e^x}{n!} > 0$) : $|f(x)| \leq \frac{e^x}{n!} \times \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{e^x}{(n+1)!} \times x^{n+1}$

Le $n+1$ au dénominateur est bien constant vis-à-vis de x et ne me dérange donc pas, je pourrai le refourguer à mon C . Mais pas e^x ...

Enfin, comme $x \leq 1$, la croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$ nous permet d'affirmer : $e^x \leq e^1 = e$. Donc : $\forall x \in [0 ; 1]$, $|f(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!} \times x^{n+1} = \frac{e}{(n+1)!} \times |x|^{n+1}$

Ici, $x = |x|$ car $x \geq 0$

- Si $x \in [-1 ; 0[$: $\int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt = - \int_x^0 \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt = \int_x^0 -\frac{t^n}{n!} e^{-t} dt$

Histoire, déjà, de mettre les bornes dans le sens croissant... Mais le signe de la fonction à l'intérieur de l'intégrale n'est pas tout à fait clair, vu qu'il dépend de la parité de n . Eh oui, t^n ...

Pour tout $t \in [0 ; x]$, $t \leq 0$. Donc si n est impair, t^n est négatif, et dans ce cas : $-\frac{t^n}{n!} e^{-t} \geq 0$.

Et si n est pair, t^n est positif, et dans ce cas : $-\frac{t^n}{n!} e^{-t} \leq 0$

Dans le cas n impair : $\int_x^0 -\frac{t^n}{n!} e^{-t} dt \geq 0$, d'où $|f(x)| = e^x \times \int_x^0 -\frac{t^n}{n!} e^{-t} dt$

Et, pour tout $t \in [x ; 0]$, $t \geq x$ donc $-t \leq -x$ puis $e^{-t} \leq e^{-x}$ et donc (comme $-\frac{t^n}{n!} \geq 0$)

$$-\frac{t^n}{n!} e^{-t} \leq -\frac{t^n}{n!} e^{-x}. \text{ Puis : } |f(x)| \leq e^x \times \int_x^0 -\frac{t^n}{n!} e^{-x} dt = e^x \times \frac{e^{-x}}{n!} \times \int_x^0 -\frac{t^n}{n!} dt = -\frac{1}{n!} \int_x^0 t^n dt$$

$$\text{Autrement dit : } |f(x)| \leq -\frac{1}{n!} \times \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_x^0 = -\frac{1}{n!} \times \left(0 - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ici, $n+1$ étant pair, x^{n+1} est nécessairement positif, donc égal à sa valeur absolue $|x|^{n+1}$, qui est aussi $|x|^{n+1}$

$$\text{Dans le cas } n \text{ pair} : \int_x^0 -\frac{t^n}{n!} e^{-t} dt \leq 0, \text{ d'où } |f(x)| = -e^x \times \int_x^0 -\frac{t^n}{n!} e^{-t} dt = \frac{e^x}{n!} \times \int_x^0 \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt$$

Comme précédemment, pour tout $t \in [x ; 0]$, $e^{-t} \leq e^{-x}$ et donc (comme $\frac{t^n}{n!} \geq 0$)

$$\frac{t^n}{n!} e^{-t} \leq \frac{t^n}{n!} e^{-x}. \text{ Puis : } |f(x)| \leq e^x \times \int_x^0 \frac{t^n}{n!} e^{-x} dt = e^x \times \frac{e^{-x}}{n!} \times \int_x^0 \frac{t^n}{n!} dt = \frac{1}{n!} \int_x^0 t^n dt$$

$$\text{Autrement dit : } |f(x)| \leq \frac{1}{n!} \times \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_x^0 = \frac{1}{n!} \times \left(0 - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = -\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ici, $n+1$ étant impair, $|x|^{n+1} = |x^{n+1}| = -x^{n+1}$

Récapitulons : pour tout $x \in [0 ; 1]$, $|f(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!} \times |x|^{n+1}$.

Et, pour tout $x \in [-1 ; 0]$, $|f(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \times |x|^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!} \times |x|^{n+1}$

En posant $C = \frac{e}{(n+1)!} > 0$, nous avons bien : $\forall x \in [-1 ; 1], |f(x)| \leq C|x|^{n+1}$

Confession : j'aurais pu vous (nous) simplifier la vie en vous faisant admettre l'inégalité triangulaire pour les intégrales, comme pour l'exercice 10. Mais l'occasion de vous faire manipuler les signes, les valeurs absolues, et de vous faire faire des disjonctions de cas, était trop belle...

3) Montrons que pour tout $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$, $a_k \neq 0$. Par l'absurde, supposons :

$\exists k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$, $a_k \neq 0$. Comme suggéré par l'énoncé, notons alors k_0 le plus petit indice k tel que $a_k \neq 0$. Dit autrement : $k_0 = \min \{k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket, a_k \neq 0\}$.

L'an prochain, vous direz que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément...

Pour tout réel x , $Q(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k = \sum_{k=k_0}^N a_k x^k$

C'est en effet uniquement à partir de k_0 qu'il y a des a_k éventuellement non nuls.

Et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\frac{Q(x)}{x^{k_0}} = \frac{1}{x^{k_0}} \sum_{k=k_0}^N a_k x^k = \sum_{k=k_0}^N a_k \frac{x^k}{x^{k_0}} = \sum_{k=k_0}^N a_k x^{k-k_0}$

Or, pour tout $k > k_0$, $k - k_0 \in \mathbb{N}^*$, et donc : $\lim_{x \rightarrow 0} x^{k-k_0} = 0$.

Et, pour $k = k_0$, $a_{k_0} x^{k_0-k_0} = a_{k_0} x^0 = a_{k_0}$. Donc : $\lim_{x \rightarrow 0} x^{k_0-k_0} = a_{k_0}$

Par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=k_0}^N a_k x^{k-k_0} = a_{k_0}$. Autrement dit : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Q(x)}{x^{k_0}} = a_{k_0}$

Mais, par hypothèse : $\forall x \in [-1; 1]$, $0 \leq |Q(x)| \leq D|x|^{n+1}$.

D'où, en divisant par $|x^{k_0}| > 0$: $\forall x \in [-1; 1] \setminus \{0\}$, $0 \leq \left| \frac{Q(x)}{x^{k_0}} \right| \leq D|x|^{n+1-k_0}$

Et $n+1-k_0 > 0$, donc : $\lim_{x \rightarrow 0} D|x|^{n+1-k_0} = 0$

Puis, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{Q(x)}{x^{k_0}} \right| = 0$. C'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Q(x)}{x^{k_0}} = 0$

Mais nous avons établi plus haut : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Q(x)}{x^{k_0}} = a_{k_0}$.

Donc, par unicité de la limite : $a_{k_0} = 0$, ce qui contredit la définition de k_0 .

Notre supposition de départ, à savoir l'existence d'un entier $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$ tel que $a_k \neq 0$, était donc fausse.

Enfin, tous les coefficients a_k pour $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$ sont nuls.

4) Pour tout réel x , $P(x) = g(x) - f(x)$. D'après 1), g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = y$, et il existe donc un réel K tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = K e^x$

Ce serait bien de déterminer précisément ce K ...

De plus, $g(0) = P(0) + f(0) = \sum_{k=0}^n \frac{0^k}{k!} + e^0 \int_0^0 \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt = 1 + e^0 \times 0 = 1$. Et $g(0) = K e^0 = K$

Attention, dans la somme $\sum_{k=0}^n \frac{0^k}{k!}$, le terme d'indice $k = 0$ n'est pas nul. Il est égal à $\frac{0^0}{0!}$, avec $0^0 = 1$ et $0! = 1$ par convention.

Donc $K = 1$ et, par suite : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^x$. D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = e^x - f(x)$

Nous avons donc aussi : $\forall x \in \mathbb{R}, P(-x) = e^{-x} - f(-x)$

Puis : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)P(-x) = (e^x - f(x))(e^{-x} - f(-x)) = e^x \times e^{-x} - e^x f(-x) - f(x)e^{-x} + f(x)f(-x)$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)P(-x) = (e^x - f(x))(e^{-x} - f(-x)) = 1 - e^x f(-x) - f(x)e^{-x} + f(x)f(-x)$

Fort bien, mais comment, à partir de là, arriver à l'existence d'une fonction polynôme R telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)P(-x) = 1 + x^{n+1}R(x)$? Intéressons-nous un peu à $P(x)P(-x) - 1$

Il s'ensuit : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)P(-x) - 1 = -e^x f(-x) - f(x)e^{-x} + f(x)f(-x)$

La fonction $x \mapsto P(x)P(-x) - 1$ est polynomiale. Si on pouvait montrer qu'elle vérifie l'hypothèse de 3) (l'existence d'une constante C telle que...), nous aurions alors une information intéressante sur ses coefficients...

Pour tout $x \in [-1 ; 1]$, $|P(x)P(-x) - 1| = |-e^x f(-x) - f(x)e^{-x} + f(x)f(-x)|$

D'après l'inégalité triangulaire :

$|-e^x f(-x) - f(x)e^{-x} + f(x)f(-x)| \leq |-e^x f(-x)| + |-f(x)e^{-x}| + |f(x)f(-x)|$

Autrement dit : $|P(x)P(-x) - 1| \leq e^x |f(-x)| + e^{-x} |f(x)| + |f(x)| \times |f(-x)|$

Or, d'après 2) (en reprenant C de cette question) : $\forall x \in [-1 ; 1], |f(x)| \leq C|x|^{n+1}$.

Comme, pour $x \in [-1 ; 1], -x \in [-1 ; 1]$, nous savons aussi : $|f(-x)| \leq C|-x|^{n+1} = C|x|^{n+1}$

Et, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in [-1 ; 1], e^x \leq e$ et $e^{-x} \leq e$

Nous pouvons en déduire : $\forall x \in [-1 ; 1], |P(x)P(-x) - 1| \leq C|x|^{n+1}e + C|x|^{n+1}e + C^2|x|^{2n+2}$

Sommation d'inégalités permise de fait, et produit permis car tous les termes sont positifs

De plus, $0 \leq |x| \leq 1$, donc : $|x|^{2n+2} \leq |x|^{n+1}$. Nous obtenons finalement :

$\forall x \in [-1 ; 1], |P(x)P(-x) - 1| \leq C|x|^{n+1}e + C|x|^{n+1}e + C^2|x|^{n+1} = (2C + C^2)e \times |x|^{n+1}$

En posant $D = (2C + C^2)e$, nous avons bien $D > 0$ et :

$\forall x \in [-1 ; 1], |P(x)P(-x) - 1| \leq D|x|^{n+1}$

Or, la fonction $Q : x \mapsto P(x)P(-x) - 1$ est polynomiale. Il existe donc un entier naturel $N > n$ et $N + 1$ réels $a_0, a_1, \dots, a_N$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$
 N peut en effet être pris supérieur à n , quitte à ce qu'éventuellement, les a_k soient nuls à partir d'un certain rang.

D'après 3) : $\forall k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket, a_k = 0$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \sum_{k=n+1}^N a_k x^k$

Expression que nous pouvons factoriser par la plus petite puissance de x , à savoir x^{n+1} !

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = x^{n+1} \sum_{k=n+1}^N a_k x^{k-n-1} = x^{n+1} R(x)$ où $R : x \mapsto \sum_{k=n+1}^N a_k x^{k-n-1}$ est bien une fonction polynôme car pour tout $k \geq n+1$, $k-n-1$ est un entier naturel.

Nous avons donc bien établi l'existence d'une fonction polynôme R telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x)P(-x) - 1 = x^{n+1}R(x), \text{ c'est-à-dire : } \forall x \in \mathbb{R}, P(x)P(-x) = 1 + x^{n+1}R(x)$$

L'énoncé originel parlait, à la question 3), d'un entier $N \geq n$, et non pas strictement supérieur à n . J'ai habilement effectué cette modification pour ne pas avoir à parler du cas où N serait égal à n . Dans un tel cas, nous aurions eu une somme $\sum_{k=N+1}^N$. Bizarre, la borne du bas, $N+1$, est strictement supérieure à celle du haut, N . Il existe une convention qui permet d'éviter de traiter ce cas à part, et stipule qu'une telle somme est nulle, puisqu'on somme sur un ensemble vide d'indices (il n'existe pas de k vérifiant $N+1 \leq k \leq N$). Cette convention, qu'il vaut mieux citer lorsqu'on l'utilise, vous simplifiera peut-être la vie l'an prochain, pourvu que vous le lui fassiez pas dire n'importe quoi en la mêlant aveuglément à d'autres propriétés calculatoires... Ou alors, vous prendrez soin de traiter le cas litigieux à part.

"J'ai habilement effectué cette modification pour ne pas avoir à parler du cas où N serait égal à n "... Ahem.

Exercice 14

*Quiconque réussit celui-ci haut la main
aura fait son petit binôme de chemin...*

Énoncé : (temps conseillé : 55 min) (****) d'après Agro-Véto 2024 CR

Dans cet exercice, on pourra librement utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

1) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall j \in \llbracket 0; p \rrbracket, \binom{p}{j} \frac{1}{j+1} = \binom{p+1}{j+1} \frac{1}{p+1}$.

2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall j \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket, \binom{p+1}{j+1} = \binom{p}{j+1} + \binom{p}{j}$

3) Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k$.

4) Démontrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}$

Remarques sur l'énoncé :

La formule du binôme de Newton rappelée par l'énoncé fait figurer deux sommes. On peut vérifier qu'elles sont égales par changement d'indice $j = n - k$ (plus de détails dans [cette vidéo](#) de la playlist sur le signe $\sum$) en rappelant $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$. Par ailleurs, il est tout à fait normal que l'on puisse intervertir a et b comme c'est le cas entre les deux sommes, puisque $(a + b)^n = (b + a)^n$. Quant à n , constant dans la somme, il n'est évidemment pas affecté par le changement d'indice.

Cette formule du binôme de Newton se démontre par récurrence sur n , à coups de manipulations sur les sommes (changements d'indice, expulsions de termes) et les coefficients binomiaux (formule du triangle de Pascal). Elle est plus généralement valable pour a et b complexes.

Correction de l'exercice 14 :

1) *Formule du chef, du pion, du capitaine... L'égalité que nous nous apprêtons à établir est connue sous des noms divers.*

$$\text{Pour tout } j \in \llbracket 0; p \rrbracket, \binom{p}{j} \frac{1}{j+1} = \frac{p!}{j!(p-j)!} \times \frac{1}{j+1} = \frac{p!}{(j+1)!(p-j)!}$$

Nous avons simplement utilisé le fait que $j! \times (j+1) = (j+1)!$. Et maintenant ? Etant donné le coefficient binomial à obtenir, il faut réussir à faire apparaître du $(p+1)!$ au numérateur. Qu'à cela ne tienne !

$$\text{Donc : } \forall j \in \llbracket 0; p \rrbracket, \binom{p}{j} \frac{1}{j+1} = \frac{p! \times (p+1)}{(j+1)!(p-j)!} \times \frac{1}{p+1} = \frac{(p+1)!}{(j+1)!(p-j)!} \times \frac{1}{p+1}$$

Un petit effort d'imagination et nous serons en mesure de reconnaître le $\binom{p+1}{j+1}$ demandé : $p-j$ et $p+1-(j+1)$, c'est la même chose...

$$\text{Puis : } \binom{p}{j} \frac{1}{j+1} = \frac{(p+1)!}{(j+1)!(p+1-(j+1))!} \times \frac{1}{p+1}$$

$$\text{Enfin : } \forall j \in \llbracket 0; p \rrbracket, \binom{p}{j} \frac{1}{j+1} = \binom{p+1}{j+1} \frac{1}{p+1}$$

2) *Cette égalité-ci, que vous avez peut-être déjà croisée en Terminale, est connue sous le nom de formule de triangle de Pascal. Pour l'établir, partons plutôt du membre de droite, qui est une somme de deux coefficients binomiaux. Une fois exprimés sous forme de quotients, il sera plus simple de les unir sous un même dénominateur.*

$$\text{Pour tout } j \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket, \binom{p}{j+1} + \binom{p}{j} = \frac{p!}{(j+1)!(p-j-1)!} + \frac{p!}{j!(p-j)!} = \frac{p! \times (p-j) + p! \times (j+1)}{(j+1)!(p-j)!}$$

$(j+1)!(p-j)!$ est bien un multiple commun à $(j+1)!(p-j-1)!$ et $j!(p-j)!$

En effet : $(j+1)!(p-j)! = (j+1)!(p-j-1)! \times (p-j)$ et $(j+1)!(p-j)! = j!(p-j-1)! \times (j+1)$

$$\text{Donc : } \forall j \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket, \binom{p}{j+1} + \binom{p}{j} = \frac{p!(p-j+j+1)}{(j+1)!(p-j)!} = \frac{p!(p+1)}{(j+1)!(p-j)!} = \frac{(p+1)!}{(j+1)!(p+1-(j+1))!}$$

$$\text{Enfin : } \forall j \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket, \binom{p+1}{j+1} = \binom{p}{j+1} + \binom{p}{j}$$

C'était une démonstration calculatoire assez directe de la formule. Vous en trouverez ici une autre démonstration, basée sur des considérations ensemblistes. Voici aussi le lien vers un exercice corrigé établissant un résultat plus élaboré qui en découle : la formule itérée de Pascal.

3) Il s'agit tout simplement d'appliquer la formule du binôme de Newton donnée par l'énoncé, pourvu que l'on voie bien, dans notre cas, qui est n , et qui sont a et b ...

$$\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k \times 1^{n-k} \quad \text{Ben oui, } 1^{n-k}, \text{ ça fait toujours } 1...$$

On peut donc appliquer la formule avec $a = -1$, $b = 1$ et $n = p + 1$

$$\text{D'après la formule du binôme de Newton : } \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k = (-1 + 1)^{p+1} = 0^{p+1}$$

Et $p + 1 \in \mathbb{N}^*$, donc $0^{p+1} = 0$ Pas de risque de tomber sur du 0^0 , égal à 1 par convention.

$$\text{Nous avons donc établi : } \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k = 0$$

4) L'énoncé originel précisait « par récurrence », ce que j'ai été assez sadique (ou pédagogue ?) pour faire disparaître. Histoire, si ça n'a pas été le cas ici, que vous pensiez un peu plus souvent à une démonstration par récurrence lorsque vous ne voyez aucune option plus directe pour démontrer une propriété à démontrer pour tout entier p à partir d'un certain rang. Voir un lien sympathique entre la propriété au rang p et la propriété au rang $p + 1$ est un plus (notre situation n'en est pas le meilleur exemple).

$$\text{Soit, pour tout } p \in \mathbb{N}^*, \text{ la propriété } P_p : \left\langle \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \right\rangle \quad P_p \text{ ha ha ha...}$$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul p , P_p est vraie.

Initialisation pour $p = 1$: $\sum_{j=0}^{1-1} \binom{1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \binom{1}{1} \frac{(-1)^0}{1} = 1$ d'une part, et $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 1$ d'autre part. Donc P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, P_p soit vraie, et montrons P_{p+1} .

Supposons donc : $\sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}$ et montrons : $\sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k}$

La difficulté, c'est que dans la somme de gauche, on ne se contente pas d'ajouter un terme d'indice p : on modifie tous les termes, à cause du p qui devient $p+1$ dans le coefficient binomial. Peut-être qu'à l'aide des premières questions...

$$\sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} + \binom{p+1}{p+1} \frac{(-1)^p}{p+1} = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} + \frac{(-1)^p}{p+1}$$

Nous nous apprêtons à utiliser le résultat de 2). Pourquoi ne pas l'avoir fait directement, avant d'expulser le dernier terme de la somme comme ci-haut ? Parce que la formule n'est utilisable que pour les $j \leq p-1$, et pas pour $j = p$.

$$\text{Puis, d'après 2) : } \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{j=0}^{p-1} \left(\binom{p}{j+1} + \binom{p}{j} \right) \frac{(-1)^j}{j+1} + \frac{(-1)^p}{p+1}$$

$$\text{Par linéarité : } \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j} \frac{(-1)^j}{j+1} + \frac{(-1)^p}{p+1}$$

Oh, et si le dernier terme isolé allait rejoindre la dernière somme, dont il peut être vu comme le terme d'indice p ?

$$\text{Donc : } \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} + \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \frac{(-1)^j}{j+1}.$$

$$\text{Puis, d'après l'hypothèse de récurrence } P_p : \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} + \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \frac{(-1)^j}{j+1} \quad (*)$$

Pas tout à fait tirés d'affaire. Mais le terme général de la dernière somme nous (vous ?) fait énormément penser à la 1)...

$$\text{D'après 1) : } \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{p+1} = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} (-1)^j \text{ par linéarité.}$$

Ici, c'est à 3) que nous pensons très fort, mais ce $j+1$ en bas du coefficient binomial ne nous arrange pas. Allez, un petit changement d'indice...

$$\text{Le changement d'indice } k = j+1 \text{ fournit : } \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} (-1)^j = \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^{k-1}$$

$$= -\frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k \text{ Puisque } (-1)^k = (-1) \times (-1)^{k-1} = -(-1)^{k-1}, \quad (-1)^{k-1} = -(-1)^k$$

Utiliser 3) va bientôt être possible, mais attention, notre somme commence à $k = 1$.

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} (-1)^j &= -\frac{1}{p+1} \left(\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k - \binom{p+1}{0} (-1)^0 \right) \\ &= -\frac{1}{p+1} \left(\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k - 1 \right) = -\frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k + \frac{1}{p+1} = 0 + \frac{1}{p+1} \text{ d'après 3).} \end{aligned}$$

Rappelons, au cas où, que pour tout entier naturel n , $\binom{n}{0} = 1$

$$\text{Par suite, en revenant à (*) : } \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} + \frac{1}{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k} \quad \text{Ouf!}$$

P_{n+1} est donc vraie.

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure que pour tout entier naturel non nul p , P_p est vraie.

$$\text{Autrement dit : } \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1}$$

Exercice 15

*Le niveau de confiance est peut-être trop bas :
mon choix d'avion dépend d'un calcul de probas.*

Énoncé : (temps conseillé : 40 min) (**) d'après concours G2E 2014

Une compagnie aérienne dispose d'une flotte constituée de deux types d'avions : des trimoteurs (un moteur situé en queue d'avion et un moteur sous chaque aile) et des quadrimoteurs (deux moteurs sous chaque aile).

Tous les moteurs de ces avions sont susceptibles, durant chaque vol, de tomber en panne avec la même probabilité $x \in]0 ; 1[$ et indépendamment les uns des autres. Toutefois, les trimoteurs peuvent achever leur vol si le moteur situé en queue ou les deux moteurs d'ailes sont en état de marche et les quadrimoteurs le peuvent si au moins deux moteurs situés sous deux ailes distinctes sont en état de marche.

1) On note X_3 (respectivement X_4) la variable aléatoire correspondant au nombre de moteurs en panne sur un trimoteur (respectivement un quadrimoteur) durant un vol.

a) Quelles sont les lois suivies par X_3 et X_4 ?

b) Calculer la probabilité que strictement moins de la moitié des moteurs du trimoteur tombent en panne. Même question pour le quadrimoteur.

2) On note T l'événement "le trimoteur achève son vol".

Démontrer que : $P(T) = (1 - x)(-x^2 + x + 1)$

3) On note Q l'événement "le quadrimoteur achève son vol".

Démontrer que : $P(Q) = (1 - x)^2(1 + x)^2$

4) Déterminer, des quadrimoteurs ou des trimoteurs, quels sont les avions les plus sûrs.

Remarques sur l'énoncé :

N'hésitez pas, si besoin, à introduire des événements adéquats. En veillant bien à ce que leurs définitions ne rentrent pas en contradiction avec celles de l'énoncé...

Correction de l'exercice 15 :

1)a) On répète 3 fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli : considérer un moteur du trimoteur et voir s'il tombe en panne au cours du vol (succès) ou pas (échec). La probabilité de succès est x . La variable aléatoire X_3 compte le nombre total de succès à l'issue de ces répétitions. X_3 suit donc une loi binomiale de paramètres 3 et x . De même, X_4 suit une loi binomiale de paramètres 4 et x .

Autrement dit : $X_3 \sim \mathcal{B}(3, x)$ et $X_4 \sim \mathcal{B}(4, x)$

Remarquez que la notion de succès en probabilités, et plus précisément dans le cadre des lois binomiales, n'a rien de mélioratif ni de moral : elle dépend uniquement de ce que l'on choisit de compter. Ici, la panne d'un moteur est considérée comme un succès.

1)b) On nous demande $P(X_3 < \frac{3}{2})$, c'est-à-dire, X_3 étant à valeurs entières, $P(X_3 \leq 1)$.
$$P(X_3 \leq 1) = P(X_3 = 0) + P(X_3 = 1) = \binom{3}{0} x^0 (1-x)^{3-0} + \binom{3}{1} x^1 (1-x)^{3-1} = (1-x)^3 + 3x(1-x)^2$$

Donc $P(X_3 \leq 1) = (1-x)^2(1-x+3x) = (1-x)^2(2x+1)$.

Enfin, la probabilité que strictement moins de la moitié des moteurs du trimoteur tombent en panne est égale à $(1-x)^2(2x+1)$

Il est de bon ton de garder en tête que, pour tout entier naturel n : $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$

« Pour tout entier naturel, tu es sûr pour $\binom{n}{1}$? » Oui, dans le cas $n = 0$, ça donne : $\binom{0}{1} = 0$.

Plus généralement, pour tous k et n entiers naturels tels que $n < k$, $\binom{n}{k} = 0$

$\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments, et il y a, par exemple, 0 parties à 5 éléments dans un ensemble qui compte 3 éléments...

De même : $P(X_4 < \frac{4}{2}) = P(X_4 < 2) = P(X_4 \leq 1) = P(X_4 = 0) + P(X_4 = 1)$

$$= \binom{4}{0} x^0 (1-x)^{4-0} + \binom{4}{1} x^1 (1-x)^{4-1} = (1-x)^4 + 4x(1-x)^3 = (1-x)^3(1-x+4x) = (1-x)^3(3x+1)$$

La probabilité que strictement moins de la moitié des moteurs du quadrimoteur tombent en panne est égale à $(1-x)^3(3x+1)$

2) Appelons m_1 et m_2 les deux moteurs d'ailes, et m_3 le moteur de queue du trimoteur. Soit, pour tout $i \in \llbracket 1 ; 3 \rrbracket$, l'événement M_i : « le moteur m_i reste en état de marche pendant le vol ». L'événement T peut s'exprimer ainsi : $T = (M_1 \cap M_2) \cup M_3$. Donc :

$$P(T) = P(M_1 \cap M_2) + P(M_3) - P((M_1 \cap M_2) \cap M_3) = P(M_1 \cap M_2) + P(M_3) - P(M_1 \cap M_2 \cap M_3)$$

La fameuse formule : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Or, les événements M_1 , M_2 et M_3 sont indépendants par hypothèse.

$$\text{Donc : } P(T) = P(M_1) \times P(M_2) + P(M_3) - P(M_1) \times P(M_2) \times P(M_3) = (1-x)^2 + 1-x - (1-x)^3$$

En effet, $P(M_1) = P(M_2) = P(M_3) = 1 - P(\overline{M_1}) = 1-x$. C'est la probabilité, pour un moteur donné, de ne pas tomber en panne.

$$\text{Puis : } P(T) = (1-x)(1-x+1-(1-x)^2) = (1-x)(1-x+1-1+2x-x^2)$$

$$\text{Enfin : } P(T) = (1-x)(-x^2+x+1)$$

Quant au quadrimoteur, appelons m_1 et m_2 les moteurs sous son aile gauche d'une part, et m_3 et m_4 les moteurs sous son aile droite d'une part. Pour tout $i \in \llbracket 1 ; 4 \rrbracket$, l'événement M_i est toujours : « le moteur m_i reste en état de marche pendant le vol »

Cette fois-ci, $\overline{Q}$ est plus simple à exprimer que Q ... Le quadrimoteur n'achève pas son vol si et seulement si au moins une des deux ailes se retrouve sans moteur fonctionnel.

$$\overline{Q} = (\overline{M_1} \cap \overline{M_2}) \cup (\overline{M_3} \cap \overline{M_4}) \text{ donc } P(\overline{Q}) = P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2}) + P(\overline{M_3} \cap \overline{M_4}) - P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3} \cap \overline{M_4})$$

Par indépendance de M_1 , M_2 , M_3 et M_4 (et, en conséquence, de $\overline{M_1}$, $\overline{M_2}$, $\overline{M_3}$ et $\overline{M_4}$) :

$$P(\overline{Q}) = P(\overline{M_1})P(\overline{M_2}) + P(\overline{M_3})P(\overline{M_4}) - P(\overline{M_1})P(\overline{M_2})P(\overline{M_3})P(\overline{M_4}) = x^2 + x^2 - x^4 = 2x^2 - x^4$$

$$\text{Puis : } P(\overline{Q}) = 1 - 2x^2 + x^4 = 1 - 2x^2 + (x^2)^2 = (1-x^2)^2 = [(1-x)(1+x)]^2.$$

$$\text{Enfin : } P(Q) = (1-x)^2(1+x)^2$$

Ce n'était pas le seul moyen de parvenir au résultat, mais les variantes, comme le fait d'introduire deux variables aléatoires suivant une loi binomiale, et comptant chacune le nombre de pannes (ou de moteurs encore en marche) sous chaque aile, reviennent à peu près au même.

4) Il s'agit tout simplement de comparer $P(T)$ et $P(Q)$, par exemple - ce qui me semble le plus simple ici - en déterminant le signe de leur différence.

$$\begin{aligned} P(T) - P(Q) &= (1-x)(-x^2+x+1) - (1-x)^2(1+x)^2 = (1-x)(-x^2+x+1 - (1-x)(1+x)^2) \\ &= (1-x)(-x^2+x+1 - (1-x)(1+2x+x^2)) = (1-x)(-x^2+x+1 - 1 - 2x - x^2 + x + 2x^2 + x^3) \end{aligned}$$

Après simplifications : $P(T) - P(Q) = (1-x)x^3$

Et : $x \in]0 ; 1[$ donc $1-x > 0$ et $x^3 > 0$. D'où : $P(T) - P(Q) > 0$. Autrement dit : $P(T) > P(Q)$

La probabilité qu'un trimoteur achève son vol est donc strictement supérieure à la probabilité qu'un quadrimoteur achève son vol.

Nous pouvons en déduire que les trimoteurs sont plus sûrs que les quadrimoteurs.

Exercice 16

*Les inégalités, les tangentes, les cordes
ne sauraient effrayer ma plume monocorde.*

Énoncé : (temps conseillé : 1h 10 min) (****) d'après ENS 2021 BCPST

1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit f une fonction convexe sur I . Soient a et b appartenant à I , avec $a < b$, et soit $\lambda \in [0; 1]$.

a) Justifier que $\lambda a + (1 - \lambda)b \in [a; b]$.

b) Montrer que $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$

On pourra utiliser la position de la courbe de f par rapport à ses sécantes (ou cordes).

c) Justifier que l'inégalité précédente reste valable pour tous a et b appartenant à I .

2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\forall \lambda \in [0; 1], e^{\lambda a + (1 - \lambda)b} \leq \lambda e^a + (1 - \lambda)e^b$

3) On se place dans un univers Ω . On admet que toutes les variables aléatoires mises en jeu ici possèdent une espérance. Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$ et soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega)$ est fini avec $X(\Omega) \subset [x_1; x_2]$.

L'espérance $E(X)$ de X est égale à un certain réel μ .

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par $Y = e^X$.

a) Montrer que $Y \leq \frac{x_2 - X}{x_2 - x_1} e^{x_1} + \frac{X - x_1}{x_2 - x_1} e^{x_2}$

b) Montrer que $E(Y) \leq \frac{x_2 - \mu}{x_2 - x_1} e^{x_1} + \frac{\mu - x_1}{x_2 - x_1} e^{x_2}$

Remarques sur l'énoncé :

A partir de l'inégalité de convexité qu'on nous demande d'établir en 1)b) et 1)c), il est possible d'obtenir cette inégalité de convexité généralisée (ou inégalité de Jensen) :

pour tout entier $n \geq 2$, on a : pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, $f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$ C'est l'objet de cet exercice (difficile).

Sans rentrer dans trop de détails théoriques que vous aurez tout le loisir de découvrir l'an prochain, une variable aléatoire réelle X est une fonction définie sur un certain univers Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$. $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs prises par X . Pour tout

$\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est la valeur que prend X lorsque l'issue ω se réalise.

$Y = e^X$ est la variable aléatoire définie par : $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = e^{X(\omega)}$

Parlons d'inégalités entre variables aléatoires. Pour deux variables aléatoires X et Y définies sur un univers Ω , affirmer $X \leq Y$ revient à dire : $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$. Autrement dit, quelle que soit l'issue, la valeur prise par X est inférieure ou égale à la valeur prise par Y . Il ne faut pas confondre le fait de dire $X \leq Y$ avec le fait de considérer l'événement $[X \leq Y]$, qui peut se réaliser ou pas. Événement dont on peut éventuellement calculer la probabilité, que l'on note $P(X \leq Y)$ par un abus de notation largement admis.

De même, affirmer $X = Y$ revient à dire : $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = Y(\omega)$. A ne pas confondre avec l'événement $[X = Y]$.

Dernière déclinaison (celle qui, d'expérience, induit le plus souvent en erreur) : affirmer $X = 3$ revient à dire que X est la variable aléatoire constante égale à 3. A ne pas confondre avec l'événement $[X = 3]$, qui peut se réaliser ou pas.

A priori, en Terminale, on ne vous embêtait pas trop sur l'existence de l'espérance des variables aléatoires que vous manipulez. Vous verrez dans le supérieur que toute variable aléatoire n'admet pas forcément une espérance. Mais dans le cas particulier (qui était souvent le vôtre, et qui est celui de cet énoncé) où l'on manipule des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini, l'existence de cette espérance ne pose pas de problème. En particulier, il n'est pas attendu de votre part ici de justifier l'existence de $E(Y)$. L'an prochain, dans ce genre de cas simple, vous vous fendrez d'une justification du style « l'ensemble $Y(\Omega)$ est fini, donc Y admet une espérance ».

On rappelle enfin la croissance de l'espérance : si deux variables aléatoires X et Y admettent toutes deux une espérance, et si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$

Correction de l'exercice 16 :

1)a) Une première question en apparence relativement gentille...

$a \leq b$ et $\lambda \in [0; 1]$, donc $\lambda \geq 0$ et $1 - \lambda \geq 0$.

Donc $\lambda a + (1 - \lambda)a \leq \lambda a + (1 - \lambda)b \leq \lambda b + (1 - \lambda)b$. Autrement dit : $a \leq \lambda a + (1 - \lambda)b \leq b$

Nous avons bien montré : $\lambda a + (1 - \lambda)b \in [a; b]$

En toute rigueur, la justification ci-haut suffit à établir le résultat demandé. On multiplie des inégalités par λ et $1 - \lambda$: il était donc important de préciser leur positivité. Si c'est allé trop vite à votre goût, voici une rédaction plus détaillée, en aboutissant séparément aux deux inégalités qui constituent l'encadrement demandé. Partant de $a \leq b$:

D'une part, $\lambda \geq 0$ donc $\lambda a \leq \lambda b$. Puis : $\lambda a + (1 - \lambda)b \leq \lambda b + (1 - \lambda)b$. Donc : $\lambda a + (1 - \lambda)b \leq b$

D'autre part, $\lambda \leq 1$, donc $1 - \lambda \geq 0$. D'où : $(1 - \lambda)b \geq (1 - \lambda)a$. Puis : $\lambda a + (1 - \lambda)b \geq \lambda a + (1 - \lambda)a$.

Donc : $\lambda a + (1 - \lambda)b \geq a$. Les deux inégalités soulignées donnent l'encadrement demandé.

1)b) f est convexe sur I , et a et b sont deux réels de cet intervalle. La corde (ou sécante) (d) joignant les points d'abscisses a et b de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f est donc au-dessus de $\mathcal{C}$ sur le segment $[a; b]$ (ici, on a bien $a < b$)

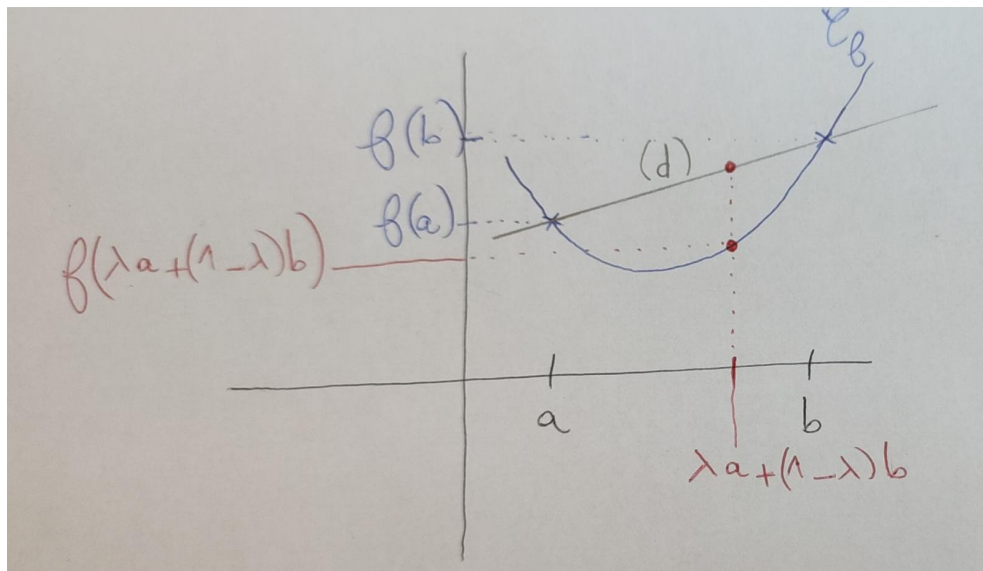


Schéma à main levée (encore...) représentant la situation.

La sécante (d) est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur $[a; b]$

De plus, d'après 1)a) : $\lambda a + (1 - \lambda)b \in [a; b]$.

Et $f(\lambda a + (1 - \lambda)b)$ est l'ordonnée du point de la courbe de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $\lambda a + (1 - \lambda)b$

Point que nous avons placé sur la courbe. Il était intéressant de voir à quoi correspond géométriquement ce fameux $f(\lambda a + (1 - \lambda)b)$, membre de gauche de l'inégalité demandée.

Ce point est situé en-dessous du point de même abscisse situé sur la droite (d).

On aimerait bien avoir l'ordonnée de ce dernier point d'abscisse $\lambda a + (1 - \lambda)b$ et situé sur la droite (d) : on pourrait alors affirmer que $f(\lambda a + (1 - \lambda)b)$ est inférieur ou égal à cette ordonnée. Et avec un peu de chance, cette ordonnée serait...

Notons M le point d'abscisse $\lambda a + (1 - \lambda)b$ et situé sur la droite (d). $M(x_M, y_M)$ avec $x_M = \lambda a + (1 - \lambda)b$ et y_M à déterminer. De même, soient les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$. La droite (d) est donc en fait la droite (AB).

Les points A , M et B étant alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x_M - a \\ y_M - f(a) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} b - a \\ f(b) - f(a) \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Donc $(x_M - a)(f(b) - f(a)) - (b - a)(y_M - f(a)) = 0$ *Oui, un déterminant si vous voulez... Dans cette égalité, isolons notre inconnue y_M (et remplaçons x_M par son expression connue).*

D'où : $(b - a)(y_M - f(a)) = (\lambda a + (1 - \lambda)b - a)(f(b) - f(a))$

Autrement dit : $(b - a)(y_M - f(a)) = ((\lambda - 1)a + (1 - \lambda)b)(f(b) - f(a))$

Il y a moyen de factoriser par $\lambda - 1$ à droite... Ben oui, $\lambda - 1 = -(1 - \lambda)$

Donc : $(b - a)(y_M - f(a)) = (1 - \lambda)(b - a)(f(b) - f(a))$

Ce serait sympa de simplifier par $b - a$ des deux côtés... Mais il faut avoir conscience de l'opération mathématique qui se cache derrière le mot « simplifier », pour pouvoir, le cas échéant, justifier son application si nécessaire. Ici en l'occurrence, il s'agit de diviser par $b - a$.

Comme $b - a \neq 0$, nous pouvons en déduire : $y_M - f(a) = (1 - \lambda)(f(b) - f(a))$

Puis : $y_M = (1 - \lambda)(f(b) - f(a)) + f(a) = (1 - \lambda)f(b) - (1 - \lambda)f(a) + f(a)$

Remarquez que dans la dernière ligne, je ne me suis pas senti obligé de développer $(1 - \lambda)(f(b) - f(a))$ en quatre termes. Je n'avais pas d'intérêt à casser le $1 - \lambda$. Par contre, j'ai séparé le $f(a)$ et le $f(b)$ parce qu'ils sont séparés dans le résultat que j'escompte.

Donc : $y_M = (1 - \lambda)f(b) + (1 - 1 + \lambda)f(a) = \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$. Ouf!

Et rappelons : $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq y_M$. Finalement : $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$

Il était possible d'aboutir à l'expression de y_M d'une autre manière, moins efficace (un brin plus calculatoire) mais peut-être plus intuitive pour certains : à partir des coordonnées des deux points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$, on pouvait déterminer l'équation de la droite (d). Par définition, son coefficient directeur est $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Quant à son ordonnée à l'origine (appelons-la β), on peut l'obtenir en se servant par exemple du fait que les coordonnées de A vérifient l'équation de (d). Autrement dit : $y_A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x_A + \beta$

$$\text{Puis : } \beta = y_A - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x_A = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times a$$

$$(d) \text{ a donc pour équation : } y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times a \text{ Pas très joli...}$$

$$\text{Sous une forme plus condensée, (d) : } y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Pour obtenir y_M , il ne reste plus qu'à remplacer x par l'expression de x_M dans l'équation précédente et, après calculs, vous obtiendrez : $y_M = \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$

1)c) Que nous veut cette question ? L'inégalité établie dans la question précédente n'est-elle déjà pas valable pour tous a et b appartenant à I ? Non : pour l'instant, elle l'est uniquement dans le cas $a < b$.

Soient a et b appartenant à I et soit $\lambda \in [0; 1]$.

- Si $a < b$, l'inégalité demandée est établie d'après 1)b).

- Si $a = b$: d'une part, $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) = f(\lambda a + (1 - \lambda)a) = f(a)$ et d'autre part : $\lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) = \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(a) = f(a)$. L'inégalité demandée est donc établie (au sens large, c'est une égalité ici).

- Si $a > b$, en posant $\lambda' = 1 - \lambda$, $a' = b$ et $b' = a$, nous avons :

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) = f((1 - \lambda')b' + \lambda'a') = f(\lambda'a' + (1 - \lambda')b') \text{ avec } \lambda' \in [0; 1] \text{ et } a' < b'.$$

$$\text{D'après 1)b) : } f(\lambda'a' + (1 - \lambda')b') \leq \lambda' f(a') + (1 - \lambda')f(b')$$

1)b) est en effet valable pour tous a et b de I tels que $a < b$ (nos a' et b' conviennent donc) et pour tout $\lambda \in [0; 1]$ (notre λ' convient donc).

Autrement dit : $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$

Nous avons bien établi : $\forall \lambda \in [0; 1], \forall a, b \in I, f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$

2) Le fait qu'il faille appliquer l'inégalité établie précédemment semble assez évident... La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ (dérivable deux fois, de dérivée seconde elle-même, donc strictement positive sur $\mathbb{R}$).

D'après 1)c) : $\forall \lambda \in [0; 1], e^{\lambda a + (1 - \lambda)b} \leq \lambda e^a + (1 - \lambda)e^b$

Le calme après la tempête.

Et avant la suivante...

3)a) On sent a priori que la question 2) va servir, avec x_1 et x_2 jouant respectivement les rôles de a et b . Quid de λ (et donc de $1 - \lambda$) ? Commençons par exprimer X autrement, histoire de faire apparaître ces $\frac{x_2 - X}{x_2 - x_1}$ et $\frac{X - x_1}{x_2 - x_1}$... Peut-être qu'en multipliant la première fraction par x_1 , la seconde par x_2 , et qu'en les additionnant... Toujours dans l'optique de nous mettre en condition d'utiliser 2). Soit dit en passant, le fait que $x_1 < x_2$ permet de diviser par $x_2 - x_1$ sans problème d'annulation.

Remarquons : $x_1 \times \frac{x_2 - X}{x_2 - x_1} + x_2 \times \frac{X - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 x_2 - x_1 X + x_2 X - x_1 x_2}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)X}{x_2 - x_1} = X$. Oh...

Dans l'énoncé originel, la question commençait explicitement par « en remarquant que $X = x_1 \frac{x_2 - X}{x_2 - x_1} + x_2 \frac{X - x_1}{x_2 - x_1}$... », ce que j'ai été assez peu sympathique pour supprimer.

A ce stade, il est tentant de passer à l'exponentielle et d'appliquer l'inégalité obtenue en 1). Mais attention, cette inégalité est valable (avec les bonnes hypothèses) pour des réels, pas a priori pour des variables aléatoires... Que faire ? Revenir simplement à la définition de $A \leq B$ pour deux variables aléatoires A et B : $\forall \omega \in \Omega, A(\omega) \leq B(\omega)$ (ça tombe bien, $A(\omega)$ et $B(\omega)$ sont, eux, des réels)

L'égalité de variables aléatoires précédente nous permet d'affirmer :

$$\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = x_1 \frac{x_2 - X(\omega)}{x_2 - x_1} + x_2 \frac{X(\omega) - x_1}{x_2 - x_1}.$$

$$\text{Remarquons : } 1 - \frac{x_2 - X(\omega)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_1 - x_2 + X(\omega)}{x_2 - x_1} = \frac{X(\omega) - x_1}{x_2 - x_1}$$

Par ailleurs, puisque X est à valeurs dans $[x_1; x_2] : 0 \leq x_2 - X(\omega) \leq x_2 - x_1$

D'où (puisque $x_2 - x_1 > 0$) : $0 \leq \frac{x_2 - X(\omega)}{x_2 - x_1} \leq 1$

En posant $\lambda = \frac{x_2 - X(\omega)}{x_2 - x_1}$, nous avons donc : $\lambda \in [0; 1]$ et $X(\omega) = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$

Puis : $Y(\omega) = e^{X(\omega)} = \exp(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda e^{x_1} + (1 - \lambda)e^{x_2}$ d'après 2)

Nous avons donc établi : $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) \leq \frac{x_2 - X(\omega)}{x_2 - x_1} e^{x_1} + \frac{X(\omega) - x_1}{x_2 - x_1} e^{x_2}$

Autrement dit (en revenant aux variables aléatoires) : $Y \leq \frac{x_2 - X}{x_2 - x_1} e^{x_1} + \frac{X - x_1}{x_2 - x_1} e^{x_2}$

3)b) A partir de l'inégalité 3a), la croissance de l'espérance fournit :

$$E(Y) \leq E\left(\frac{x_2 - X}{x_2 - x_1} e^{x_1} + \frac{X - x_1}{x_2 - x_1} e^{x_2}\right).$$

Puis, $\frac{e^{x_1}}{x_2 - x_1}$ et $\frac{e^{x_2}}{x_2 - x_1}$ étant des constantes, la linéarité de l'espérance donne :

$$E(Y) \leq \frac{e^{x_1}}{x_2 - x_1} E(x_2 - X) + \frac{e^{x_2}}{x_2 - x_1} E(X - x_1)$$

C'est-à-dire, encore par linéarité : $E(Y) \leq \frac{e^{x_1}}{x_2 - x_1} (x_2 - E(X)) + \frac{e^{x_2}}{x_2 - x_1} (E(X) - x_1)$

Autrement dit : $E(Y) \leq \frac{e^{x_1}}{x_2 - x_1} (x_2 - \mu) + \frac{e^{x_2}}{x_2 - x_1} (\mu - x_1)$

Nous avons bien établi : $E(Y) \leq \frac{x_2 - \mu}{x_2 - x_1} e^{x_1} + \frac{\mu - x_1}{x_2 - x_1} e^{x_2}$

**La longue question 1), notamment, est un pur ajout, visant ensuite à pouvoir vous faire profiter de cette inégalité de convexité pour la suite de l'exercice. Question 1), Pokémon que cette version BCPST a en commun PCSI avec un exercice de la version PCSI et un exercice de la version MPSI ...*

Exercice 17

*Pour trouver la proba de tant d'intersections,
des probas composées il faut l'intercession.*

Énoncé : (temps conseillé : 50 minutes) (***) *d'après Agro-Véto 2022 CR*

On admet la formule des probabilités composées : pour un entier $n \geq 2$, et pour des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$, nous avons :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules indiscernables numérotées de 1 à n . On tire au hasard une boule et on la retire ainsi que toutes les boules ayant un numéro supérieur à celui de la boule tirée. On réitère l'expérience jusqu'à ce que l'urne soit vide et l'on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages réalisés pour vider l'urne.

Pour tout entier i , on note N_i la variable aléatoire égale au numéro de la i -ème boule tirée s'il y a eu au moins i tirages, et 0 sinon.

1) Trouver la loi de X_2 puis donner son espérance et sa variance.

2) Trouver la loi de X_3 et donner son espérance.

3) Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre X_n .

4) Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.

5) Prouver que pour tout $k \in \llbracket 2 ; n \rrbracket$, on a : $P(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n P(X_{i-1} = k - 1)$

On pourra utiliser la formule des probabilités totales.

Remarques sur l'énoncé :

La formule des probabilités composées admise en début d'énoncé peut se démontrer par récurrence à partir de la formule des probabilités conditionnelles que vous connaissez $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2)$.

Pour l'anecdote, $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}$ se note plus formellement : $\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k$

Correction de l'exercice 17 :

1) Dans le cas de X_2 , on s'intéresse à une urne contenant 2 boules. X_2 , variable aléatoire égale au nombre de tirages réalisés pour vider l'urne, peut prendre les valeurs 1 et 2. Autrement dit, $X_2(\Omega) = \{1; 2\}$

En effet, si la première boule tirée est la boule numéro 1, l'urne est vidée à l'issue du premier tirage. Et si la première boule tirée est la boule numéro 2, l'urne est vidée à l'issue du second tirage. Ces deux événements étant équiprobables, nous en déduisons :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \text{ et } P(X_2 = 2) = \frac{1}{2} \quad \text{Flemme de faire un tableau pour deux valeurs...}$$

On dit que X_2 suit la loi uniforme sur $\{1; 2\}$.

L'espérance de X_2 est la suivante : $E(X_2) = 1 \times P(X_2 = 1) + 2 \times P(X_2 = 2) = \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2}$

Donc $E(X_2) = \frac{3}{2}$

Quant à sa variance, elle est la suivante :

$$V(X_2) = (1 - E(X_2))^2 \times P(X_2 = 1) + (2 - E(X_2))^2 \times P(X_2 = 2) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}$$

Donc $V(X_2) = \frac{1}{4}$

On s'est en fait servi, sans le dire, de la formule suivante : $V(X_2) = E((X - E(X))^2)$ L'an prochain, vous entendrez probablement parler de la formule de König-Huygens, qui nous aurait permis d'écrire $V(X_2) = E(X_2^2) - (E(X_2))^2 = 1^2 \times P(X_2 = 1) + 2^2 \times P(X_2 = 2) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$. Bon, l'intérêt était particulièrement limité ici, mais ce sera utile dans des situations un peu plus moches. Enfin, pour justifier l'égalité relativement intuitive $E(X_2^2) = 1^2 \times P(X_2 = 1) + 2^2 \times P(X_2 = 2)$, vous parlerez du théorème de transfert.

2) En fonction de l'ordre des numéros tirés, la variable aléatoire X_3 peut prendre les valeurs 1, 2 et 3. $X_3(\Omega) = \{1; 2; 3\}$

$$P(X_3 = 1) = P(N_1 = 1) = \frac{1}{3}.$$

$$P(X_3 = 3) = P([N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1]) \quad \text{Seul moyen de vider l'urne en trois coups.}$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$P(X_3 = 3) = P(N_1 = 3) \times P_{[N_1=3]}(N_2 = 2) \times P_{[N_1=3] \cap [N_2=2]}(N_3 = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{6}$$

En effet : $P(N_1 = 3)$ est la probabilité de tirer la boule 3 au premier tirage. $P_{[N_1=3]}(N_2 = 2)$ est la probabilité, sachant qu'on a tiré la boule 3 au premier tirage (et donc qu'il ne reste plus que les boules 1 et 2 à l'issue de ce premier tirage), de tirer la boule 2 au deuxième. Enfin, $P_{[N_1=3] \cap [N_2=2]}(N_3 = 1)$ est la probabilité, sachant qu'il ne reste plus que la boule 1, de tirer la boule 1 au troisième tirage.

Attention à l'automatisme qui consisterait à écrire, sans se soucier de l'absence d'indépendance : $P([N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1]) = P(N_1 = 3) \times P(N_2 = 2) \times P(N_3 = 1)$. Dans notre situation où le résultat d'un tirage affecte les suivants, il n'y a clairement pas indépendance des tirages.

$$\text{Enfin : } P(X_3 = 2) = 1 - P(X_3 = 1) - P(X_3 = 3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Par cette astuce, on esquivé un calcul direct qui aurait pu nous donner du fil à retordre.

La loi de X_3 est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3
$P(X_3 = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X_3) = 1 \times P(X_3 = 1) + 2 \times P(X_3 = 2) + 3 \times P(X_3 = 3) = \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{2+6+3}{6}. \quad \text{Donc } E(X_3) = \frac{11}{6}$$

3) Le nombre de tirages réalisés pour vider l'urne est supérieur ou égal à 1 (il faut évidemment au moins un tirage, même si on tire la boule numéro 1 du premier coup) et inférieur ou égal à n (au « pire », on doit attendre n tirages, si la première boule tirée est celle de numéro 1, la deuxième celle de numéro 2, et ainsi de suite jusqu'à la dernière boule tirée, de numéro n). Donc : $X_n(\Omega) \subset \llbracket 1 ; n \rrbracket$

Mais cela ne prouve pas rigoureusement l'égalité des deux ensembles. Reste à justifier que tout élément de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ appartient bien à $X_n(\Omega)$, autrement dit est une valeur que peut prendre X_n .

Nous avons déjà justifié ci-dessus : $1 \in X_n(\Omega)$ et $n \in X_n(\Omega)$. Soit, maintenant, k un entier strictement compris entre 1 et n . Si $n = 2$, il n'y en a pas, pas de soucis...

Si les $k - 1$ premiers tirages donnent ces numéros dans cet ordre : $n, n - 1, \dots, n - (k - 2)$, puis si le k -ième donne le numéro 1, l'urne aura été vidée en exactement k tirages. Donc $k \in X_n(\Omega)$. D'où $\llbracket 1 ; n \rrbracket \subset X_n(\Omega)$ et enfin, par double inclusion : $X_n(\Omega) = \llbracket 1 ; n \rrbracket$

4) L'événement $[X_n = 1]$ est égal à l'événement $[N_1 = 1]$. En effet, l'urne se vide à l'issue du premier tirage si et seulement si ce premier tirage donne la boule numéro 1.

Donc $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$

Quant à l'événement $[X_n = n]$, il est égal à $[N_1 = n] \cap [N_2 = n-1] \cap \dots \cap [N_n = 1]$.

La formule des probabilités composées fournit :

$$\begin{aligned} P(X_n = n) &= P([N_1 = n] \cap [N_2 = n-1] \cap \dots \cap [N_n = 1]) \\ &= P(N_1 = n) \times P_{[N_1=n]}(N_2 = n-1) \times P_{[N_1=n] \cap [N_2=n-1]}(N_3 = n-2) \times \dots \\ &\quad \times P_{[N_1=n] \cap [N_2=n-1] \cap \dots \cap [N_{n-1}=2]}(N_n = 1) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n-2} \times \dots \times \frac{1}{1} \quad \text{Enfin : } P(X_n = n) = \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

A chaque étape de la formule des probabilités composées, une boule est retirée, ce qui explique que, d'un dénominateur au suivant, on soustrait 1. Il y a toujours 1 au numérateur car c'est toujours la probabilité (conditionnelle, certes) de tirer une boule donnée.

5) La formule des probabilités totales, mais comment ? Et quelle partition choisir ? On est censés, à partir de $P(X_n = k)$, se retrouver avec une somme faisant intervenir les variables aléatoires X_{i-1} pour i entre 2 et n . Autrement dit, des variables aléatoires concernant le vidage d'urnes de taille plus petites que celle associée à X_n ... D'où l'idée - pas évidente la première fois, j'en conviens - de partitionner par rapport au résultat du premier tirage.

Soit $k \in \llbracket 2 ; n \rrbracket$.

Les événements $[N_1 = 1], [N_1 = 2], \dots, [N_1 = n]$ forment une partition de l'univers.

Ils correspondent en effet à toutes les valeurs possibles que peut prendre la variable aléatoire N_1 , c'est-à-dire à tous les numéros possibles que l'on peut obtenir au premier tirage.

Dans le supérieur, et en particulier en prépa, vous parlerez plus souvent de « système complet d'événements » que de « partition de l'univers », qui désignent la même chose (même s'il pourra vous arriver de recroiser la seconde formulation, souvenir heureux de vos années lycée).

D'après la formule des probabilités totales : $P(X_n = k) = \sum_{i=1}^n P([X_n = k] \cap [N_1 = i])$

De plus, si l'événement $[N_1 = 1]$ est réalisé, l'urne est vidée dès le premier tirage, et (puisque $k \geq 2$) l'événement $[X_n = k]$ ne peut être aussi réalisé.

Donc : $P([X_n = k] \cap [N_1 = 1]) = 0$ Cool, on va pouvoir démarrer la somme à $i = 2$...

Puis : $P(X_n = k) = \sum_{i=2}^n P([X_n = k] \cap [N_1 = i]) = \sum_{i=2}^n P(N_1 = i) \times P_{[N_1=i]}(X_n = k)$

Donc : $P(X_n = k) = \sum_{i=2}^n \frac{1}{n} \times P_{[N_1=i]}(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n P_{[N_1=i]}(X_n = k)$ par linéarité.

On dirait bien qu'on y est presque.. Ce serait sympa que pour tout i entre 2 et n , $P_{[N_1=i]}(X_n = k)$ soit égal à $P(X_{i-1} = k - 1)$. Cela nous arrangerait beaucoup, mais attention, pas de concordisme ! Le cas échéant, justifions-le correctement.

Pour i appartenant à $\llbracket 2 ; n \rrbracket$, si l'événement $[N_1 = i]$ est réalisé, on retire, à l'issue du premier tirage, toutes les boules de numéro supérieur ou égal à i . Ne restent donc plus que les boules numérotées de 1 à $i - 1$. Si, en sachant cela, on veut que l'urne se vide au total au bout de k tirages (en comptant celui que l'on vient d'effectuer), cela revient à vider une urne comportant $i - 1$ boules (numérotées de 1 à $i - 1$) en $k - 1$ tirages.

Eh non, en maths, il n'est absolument pas interdit de « parler en français ».

D'où : $\forall i \in \llbracket 2 ; n \rrbracket, P_{[N_1=i]}(X_n = k) = P(X_{i-1} = k - 1)$.

En conclusion, $\text{pour tout } k \in \llbracket 2 ; n \rrbracket, \text{ on a : } P(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n P(X_{i-1} = k - 1)$

Exercice 18

*Je vous choisis ce jour ma plume la plus belle
dûment aiguisée pour mes sommations d'Abel.*

Énoncé : (temps conseillé : 40 min) (***) d'après Agro-Véto 2009 Maths B

Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = P(Z = n)$ et $v_n = P(Z > n)$.

Soient les suites (S_n) et (T_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n k u_k$.

1) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer u_n en fonction de v_{n-1} et v_n .

2) En déduire que pour tout entier naturel non nul n , $T_n = S_{n-1} - n v_n$

3) Montrer que si (S_n) converge, alors (T_n) converge aussi.

Remarques sur l'énoncé :

Dire que Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$ revient à dire : $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$. L'inclusion peut être stricte ou non : peut-être l'ensemble des valeurs prises par Z est-il $\mathbb{N}$ tout entier, peut-être est-il une partie infinie strictement incluse dans $\mathbb{N}$ (par exemple, l'ensemble des entiers naturels pairs), peut-être est-il une partie finie de $\mathbb{N}$. La possibilité que $Z(\Omega)$ soit infini ne devrait pas vous déranger dans cet exercice, et ne nécessite pas de prérequis supplémentaire.

La transformation de sommes que la question 2 vous demande d'effectuer est un cas particulier d'un grand classique, connu sous le nom de transformation d'Abel. En ce sens, le contexte probabiliste de la question 1) était plus un prétexte qu'autre chose.

Correction de l'exercice 18 :

1) Pour tout entier naturel non nul n : $P(Z = n) + P(Z > n) = P(Z \geq n) = P(Z > n - 1)$

La dernière égalité est vraie parce que Z est à valeurs entières.

Quant à l'égalité $P(Z = n) + P(Z > n) = P(Z \geq n)$, elle me semble assez immédiate pour ne pas nécessiter de justification supplémentaire, mais si l'on veut faire du zèle :

$P(Z \geq n) = P([Z > n] \cup [Z = n]) = P(Z = n) + P(Z > n)$ car les événements $[Z > n]$ et $[Z = n]$ sont incompatibles.

Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n + v_n = v_{n-1}$, ou encore : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_{n-1} - v_n$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sum_{k=0}^n k u_k = \sum_{k=1}^n k u_k$ Comme $0u_0 = 0$, autant le faire sauter..

Maintenant, Comment faire entrer S_{n-1} , donc les v_k , dans la danse ?

D'après 1), pour tout entier naturel non nul k , $u_k = v_{k-1} - v_k$

D'après 1), c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. C'est donc aussi vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{D'où : } T_n = \sum_{k=1}^n k u_k = \sum_{k=1}^n k(v_{k-1} - v_k) = \sum_{k=1}^n (k v_{k-1} - k v_k)$$

$$\text{Par linéarité : } T_n = \sum_{k=1}^n k v_{k-1} - \sum_{k=1}^n k v_k$$

Vu ce qu'on nous demande d'obtenir, il serait judicieux de transformer la première somme.

Le changement d'indice $j = k - 1$ (pour se rafraîchir la mémoire, c'est ici) fournit :

$$\sum_{k=1}^n k v_{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) v_j = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) v_k = \sum_{k=0}^{n-1} (k v_k + v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} k v_k + \sum_{k=0}^{n-1} v_k \text{ par linéarité.}$$

$$\text{En revenant à } T_n, \text{ nous avons donc : } T_n = \sum_{k=0}^{n-1} k v_k + \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{k=1}^n k v_k$$

Cool, S_{n-1} apparaît au milieu ! Remplaçons la somme du milieu, et simplifions les deux sommes restantes.

$$\text{D'où : } T_n = S_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} k v_k - \sum_{k=1}^n k v_k = S_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} k v_k - \sum_{k=0}^n k v_k = S_{n-1} - n v_n$$

La dernière somme $\sum_{k=0}^n k v_k = S_{n-1} - n v_n$ était presque égale à $\sum_{k=0}^{n-1} k v_k$. Elle avait juste le

terme nv_n en plus.

Nous avons bien établi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = S_{n-1} - nv_n$

3) Remarquons que la suite (S_n) est croissante. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} v_k - \sum_{k=0}^n v_k = v_{n+1} = P(Z > n+1) \geq 0 \quad (\text{c'est une probabilité})$$

Dès lors, si (S_n) converge vers un certain réel l , nous savons : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq l$

Attention, c'est bien la croissance de (S_n) qui nous permet d'affirmer cette inégalité. Une suite convergente n'est pas nécessairement inférieure ou égale à sa limite... Ni même supérieure ou égale... Prenez par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^$, $w_n = \frac{(-1)^n}{n}$. (w_n) converge vers 0 (merci les gendarmes) en zigzaguant (de plus en plus faiblement) autour de sa limite.*

Or, d'après 2) : $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = S_{n-1} - nv_n \leq S_{n-1}$ car $nv_n = nP(Z > n) \geq 0$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n \leq l$. C'est bien ça, (T_n) est majorée...

(T_n) est donc majorée à partir du rang 1.

J'ai écrit ça par acquis de conscience, l'inégalité précédente étant vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^$. Mais toute suite majorée à partir d'un certain rang est bien majorée tout court : il suffit de prendre comme majorant M' le maximum entre le majorant M valable à partir du rang en question et tous les termes de la suite (en nombre fini) précédant ce rang.*

D'ailleurs, ici en particulier, comme $l \geq 0$ et comme $T_0 = \sum_{k=0}^0 kv_k = 0$, on aussi $T_0 \leq l$ et donc : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \leq l$

$$\text{De plus : } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} - T_n = \sum_{k=0}^{n+1} ku_k - \sum_{k=0}^n ku_k = (n+1)u_{n+1} = (n+1)P(Z = n+1) \geq 0$$

La suite (T_n) est donc croissante.

Enfin, le théorème de convergence monotone nous permet de conclure que (T_n) converge.

Nous avons bien établi le résultat suivant : $\boxed{\text{si } (S_n) \text{ converge, alors } (T_n) \text{ converge aussi.}}$

Quelques rappels de calcul matriciel

Comme seuls ceux qui ont choisi « mathématiques expertes » en Terminale sont censés avoir déjà fait du calcul matriciel, voici qui fera office de rappel pour eux et d'introduction pour les autres. Ces rappels **ne sont pas exhaustifs** et se concentreront notamment sur les notions nécessaires pour aborder les exercices 19 et 20. Vous pouvez aussi consulter [cette playlist de vidéos courtes](#), série introductive sur le calcul matriciel qui reprend en grande partie les rappels ci-après.

Enfin, si vous estimez ne pas avoir besoin de ces rappels, vous pouvez attaquer directement [les exercices ici](#).

Tailles et positions

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Une matrice réelle de taille $n \times p$ est un tableau de nombres qui comporte n lignes et p colonnes. Ces nombres sont appelés coefficients de la matrice.

Le coefficient situé à la i -ème ligne et j -ième colonne d'une matrice M sera noté $m_{i,j}$, ou parfois $[M]_{i,j}$.

Exemples : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

M est une matrice de taille 3×3 . N est une matrice de taille 3×2 .

P est une matrice de taille 2×1 . Q est une matrice de taille 1×4 .

On note aussi : $M \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $N \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $P \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$

Par ailleurs, on peut aussi dire que P est une matrice colonne de taille 2, et que Q est une matrice ligne de taille 4.

Quelques coefficients : $m_{3,3} = 2$, $n_{1,2} = -1$, $p_{2,1} = \frac{1}{2}$ et $q_{1,4} = 1$

Lorsqu'une matrice a autant de lignes que de colonnes, on dit qu'elle est carrée (de taille n si elle a n lignes). Plus simplement que $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées de taille n se note aussi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans les exemples ci-dessus, M est une matrice carrée de taille 3. On peut noter : $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Egalité de deux matrices

Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont la même taille et que leurs coefficients (aux mêmes emplacements) sont deux à deux égaux.

Matrice identité

La matrice identité de taille n est la matrice dont les coefficients diagonaux (diagonale qui va d'en haut à gauche jusqu'en bas à droite) sont égaux à 1, les autres étant égaux à 0. On la note souvent I_n .

Par exemple : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$

Matrice nulle

La matrice nulle $O_{n,p}$ est la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont égaux à 0. Par commodité, $O_{n,n}$ est notée O_n .

Par exemple : $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $O_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots$

Somme de matrices

On peut sommer deux matrices A et B de même taille.

Si A et B sont deux matrices de taille $n \times p$, la matrice $A+B$ est la matrice de taille $n \times p$ obtenue en sommant deux à deux les coefficients aux mêmes emplacements.

Exemple : si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $P = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$M+N = \begin{pmatrix} 1+1 & 0+2 & 1+0 \\ 0-1 & 1+3 & 0+4 \\ 0+5 & 0+0 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarquez que l'addition matricielle est commutative : lorsque l'addition est possible, on a toujours : $M+N = N+M$

Ici, on ne peut pas sommer M et P , ou N et P (pas les mêmes tailles)

Par ailleurs, pour toute matrice A de taille $n \times p$, $A + O_{n,p} = A$. On dit que $O_{n,p}$ est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Produit d'une matrice par un réel

On peut multiplier n'importe quelle matrice A par un réel k . La matrice kA est la matrice de même taille que A , obtenue en multipliant chaque coefficient de A par k .

Exemple : si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $-5M = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$

Produit de deux matrices

C'est plus compliqué que la somme... Il ne s'agit pas d'un simple produit terme à terme. Si A est une matrice de taille $n \times p$ et si B est une matrice de taille $p \times q$, on définit la matrice $A \times B$ (notée aussi AB) ainsi : $C = A \times B$ est la matrice de taille $n \times q$ telle que, pour tous entiers i et j vérifiant $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq q$: $c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$

Autrement dit : $c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,p}b_{p,j}$

Pour obtenir le coefficient $c_{i,j}$, on prend la i -ème ligne de A et la j -ième colonne de B . On effectue alors, pour tout entier k entre 1 et p , le produit du k -ième terme de cette i -ème ligne de A avec le k -ième terme de cette j -ème ligne de B , et on somme ces p produits. Un exemple nous permettra d'y voir plus clair :

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (de taille 3×2) et $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (de taille 2×4),

$C = A \times B$ est une matrice de taille 3×4 ,

$$\text{et } C = \begin{pmatrix} 3 \times 1 + 4 \times 1 & 3 \times 8 + 4 \times (-1) & 3 \times 0 + 4 \times 0 & 3 \times 7 + 4 \times 5 \\ 1 \times 1 + 0 \times 1 & 1 \times 8 + 0 \times (-1) & 1 \times 0 + 0 \times 0 & 1 \times 7 + 0 \times 5 \\ 2 \times 1 + 2 \times 1 & 2 \times 8 + 2 \times (-1) & 2 \times 0 + 2 \times 0 & 2 \times 7 + 2 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 0 & 41 \\ 1 & 8 & 0 & 7 \\ 4 & 14 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

Disposition plus simple pour le calcul, et détail du calcul de $c_{2,4}$

Attention : le produit matriciel $A \times B$ n'est possible que lorsque le nombre de colonnes de A est égal aux lignes de B .

Cela implique notamment que le produit matriciel n'est pas commutatif : on n'a pas en général $A \times B = B \times A$ (puisque en général, l'un peut être défini sans que l'autre ne le soit).

Dans le cas où A et B sont deux matrices carrées de même taille, les produits $A \times B$ et $B \times A$ sont bien définis, mais pas nécessairement égaux. Lorsque $A \times B = B \times A$, on dit que les matrices A et B commutent.

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 + 4 \times 1 & 3 \times 8 + 4 \times (-1) \\ 1 \times 1 + 0 \times 1 & 1 \times 8 + 0 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 20 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 8 \times 1 & 1 \times 4 + 8 \times 0 \\ 1 \times 3 + (-1) \times 1 & 1 \times 4 + (-1) \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

On remarque : $A \times B \neq B \times A$

Pour toute matrice carrée A de taille n , on a $A \times I_n = I_n \times A = A$

On dit que I_n est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Par ailleurs, pour toute matrice A de taille $n \times p$, $A \times O_{p,q} = O_{n,q}$ et $O_{m,n}A = O_{m,p}$

Cas particulier du produit d'une matrice carrée par une matrice colonne

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, AX = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times (-3) + 4 \times 5 + 1 \times 0 \\ 1 \times (-3) + 0 \times 5 + 2 \times 0 \\ -1 \times (-3) - 2 \times 5 + 6 \times 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } AX = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Quelques propriétés calculatoires

Pour tous réels a et b , pour toutes matrices M et N de même taille :

$$(a+b)M = aM + bM \quad a(bM) = (ab)M = abM \quad a(M+N) = aM + aN$$

Pour toutes matrices A, B et C tels que les produits matriciels soient possibles :

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (qu'on peut donc écrire sans ambiguïté $A \times B \times C$ ou ABC)

C'est ce qu'on appelle l'associativité du produit matriciel.

- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$

C'est ce qu'on appelle la distributivité du produit sur l'addition.

L'intégrité tombe à l'eau

Notez qu'un produit de deux matrices peut être nul sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle. Voyez plutôt :

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \times B = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ 0 \times 0 + 0 \times 0 & 0 \times 0 + 0 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$$

Et pourtant, ni A ni B n'est nulle...

La jolie propriété « un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul » que vous avez sur $\mathbb{R}$ (et aussi sur $\mathbb{C}$ si vous avez vu les nombres complexes), qui vous accompagne depuis le collège, et qui fait de $\mathbb{R}$ ce que l'on appelle - frimons un peu - un anneau intègre, tombe à l'eau pour les matrices...

Par contre, il est tout à fait exact d'affirmer que le produit λM entre un réel λ et une matrice M de taille $n \times p$ est nul si et seulement si $\lambda = 0$ ou $M = O_{n,p}$

Puissances d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A une matrice carrée de taille n .

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La puissance k -ième de A est $A^k = A \times A \times \dots \times A$ (où A apparaît k fois).

Et, par convention : $A^0 = I_n$. (de même que pour tout réel a , $a^0 = 1$)

Nous avons donc : $\forall k \in \mathbb{N}, A^{k+1} = A \times A^k = A^k \times A$.

Remarquez en particulier que pour tout $k \in \mathbb{N}, I_n^k = I_n$.

Inversibilité et inverse d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit M une matrice carrée de taille n .

M est dite inversible lorsqu'il existe une matrice N carrée de taille n telle que :

$$M \times N = N \times M = I_n.$$

N est alors appelée l'inverse de M , et on note $N = M^{-1}$.

(En fait, l'une des deux égalités $M \times N = I_n$ ou $N \times M = I_n$ suffit et implique l'autre)

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 0 - 1 \times (-1) & 3 \times 1 - 1 \times 3 \\ 1 \times 0 + 0 \times (-1) & 1 \times 1 + 0 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

A est donc inversible et $A^{-1} = B$ (de même, B est inversible et $B^{-1} = A$)

Les matrices carrées de taille n ne sont pas toutes inversibles.

Lorsqu'une matrice carrée A est inversible, son inverse A^{-1} est unique.

Lorsqu'une matrice carrée A est inversible d'inverse A^{-1} , pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^{-k} est la matrice définie ainsi : $A^{-k} = (A^{-1})^k$

Lorsque A est inversible, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k l'est aussi, et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k = A^{-k}$

Transposée d'une matrice

Si A est une matrice de taille $n \times p$, la transposée de A , que l'on note A^T (ou tA), est la matrice de taille $p \times n$ telle que : $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, [A^T]_{i,j} = [A]_{j,i} = a_{j,i}$.

Autrement dit, le coefficient situé à la i -ème ligne et j -ième colonne de la matrice A^T est égal au coefficient situé à la j -ème ligne et i -ième colonne de la matrice A .

Exemple : si $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $M^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Et si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Remarquez que dans le cas de la matrice A carrée, A^T s'obtient à partir de A en effectuant, sur ses coefficients, une sorte de symétrie axiale d'axe la diagonale de A .

Une matrice carrée A est dite symétrique lorsqu'elle est égale à sa transposée, autrement dit lorsque $A^T = A$.

Une matrice carrée A est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$

Exercice 19

*Pas inversible ? Autant, plutôt que de t'en plaindre,
à défaut de vraiment l'être apprendre à le feindre*

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure 10 min) (**) d'après Agro-Véto 2016 CR

Soit n un entier naturel non nul, et soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est dite pseudo-inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} AB = BA \\ ABA = A \\ BAB = B \end{cases}$$

On dit alors que B est une pseudo-inverse de A .

- 1) Montrer que toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible est pseudo-inversible.
- 2) Montrer que la matrice nulle O_n est pseudo-inversible.
- 3) Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pseudo-inversible, ainsi que B_1 et B_2 deux pseudo-inverses de A .
 - a) En calculant AB_1AB_2 de deux façons différentes, montrer que $AB_2 = AB_1$
 - b) En déduire que $B_1 = B_2$.

Ainsi, si A est inversible, sa pseudo-inverse est unique. On pourra la noter A^*

- 4) Soit N une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un entier naturel non nul p vérifiant : $N^p = O_n$ et $N^{p-1} \neq O_n$ (on dit que N est nilpotente).

On suppose que N est pseudo-inversible, de pseudo-inverse N^* .

- a) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $N^*N^k = N^{k-1}$
- b) En déduire que N est la matrice nulle O_n .
- c) Que peut-on en déduire concernant la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$?

Remarques sur l'énoncé :

Lorsque l'énoncé nous introduit la notion de pseudo-inverse, il ne nous parle pas d'unicité. C'est uniquement à la question 3) qu'il nous fait démontrer que si la pseudo-inverse d'une matrice existe, alors elle est unique.

Correction de l'exercice 19 :

1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, et soit M^{-1} son inverse.

Tiens, est-ce que M^{-1} ne vérifierait pas les conditions requises pour être une pseudo-inverse de M ?

Par définition, $M \times M^{-1} = I_n$ et $M^{-1} \times M = I_n$ donc $M \times M^{-1} = M^{-1} \times M$

De plus : $M \times M^{-1} \times M = (M \times M^{-1}) \times M = I_n \times M = M$

Et : $M^{-1} \times M \times M^{-1} = (M^{-1} \times M) \times M^{-1} = I_n \times M^{-1} = M^{-1}$

M^{-1} est donc bien une pseudo-inverse de M , et M est donc pseudo-inversible.

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible est bien pseudo-inversible.

2) Pour le coup, la matrice nulle O_n n'est pas inversible : il ne peut pas exister de matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $O_n \times B = I_n$, vu que pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $O_n \times B = O_n \neq I_n$. Mais il faut tout de même réussir à prouver que O_n est pseudo-inversible. Là encore, une bonne candidate pour être sa pseudo-inverse semble se dessiner...

En prenant $B = O_n$, on a : $O_n \times B = O_n$ et $B \times O_n = O_n$ donc $O_n \times B = B \times O_n$

De plus : $O_n \times B \times O_n = O_n$. Et : $B \times O_n \times B = O_n = B$

O_n est donc bien une pseudo-inverse d'elle-même.

La matrice nulle O_n est donc bien pseudo-inversible.

3)a) D'une part, $AB_1AB_2 = (AB_1A)B_2 = AB_2$ car B_1 est une pseudo-inverse de A .

Obtenir AB_1 à partir de AB_1AB_2 semble moins immédiat...

D'autre part, comme A et B_1 commutent (c'est-à-dire $AB_1 = B_1A$) et comme A et B_2 commutent : $AB_1AB_2 = (AB_1)(AB_2) = B_1AB_2A$. Donc : $AB_1AB_2 = B_1(AB_2A) = B_1A$

En jouant une dernière fois du fait que A et B_1 commutent, il s'ensuit : $AB_1AB_2 = AB_1$

Enfin : $AB_2 = AB_1$

3)b) $B_2 = B_2AB_2 = B_2(AB_2) = B_2(AB_1) = B_2AB_1$ d'après 3)a).

Et $B_1 = B_1AB_1 = (B_1A)B_1 = (AB_1)B_1 = (AB_2)B_1 = (B_2A)B_1 = B_2AB_1$.

Remarquez que si nous avions commencé, en partant de B_1AB_1 , par écrire :

$B_1AB_1 = B_1AB_2$, nous aurions été bien embêtés pour retomber sur B_2AB_1 , à cause de B_1 et de B_2 qui n'ont aucune raison de commuter a priori.

Donc : $B_1 = B_2$

Comment ça, « on dirait des jeux de plage » ?

4)a) Pour tout entier $k \geq 2$, $N^* N^k = N^* N^2 N^{k-2}$

Attention, ce qui me permet d'écrire $N^k = N^2 N^{k-2}$, c'est bien le fait que $k \geq 2$. Pour $k = 1$ par exemple, $N = N^2 N^{-1}$ nécessiterait que N soit inversible, ce qui n'a aucune raison d'être le cas.

Donc : $\forall k \geq 2$, $N^* N^k = N^* N N N^{k-2} = N N^* N N^{k-2}$ car N et N^* commutent.

Puis, comme $N N^* N = N$, nous obtenons : $N^* N^k = N N^{k-2}$. Enfin : $\forall k \geq 2$, $N^* N^k = N^{k-1}$

Ce n'était pas ridicule de penser à un raisonnement par récurrence en voyant la question. Mais il est de bon ton de tenter un raisonnement direct comme ici d'abord - quitte, s'il mène à une impasse, à changer son fusil d'épaule.

4)b) Comment utiliser ce qui précède pour arriver à montrer que $N = O_n$? Il y a du O_n dans les hypothèses sur N . Tiens, cette puissance p ...

Par hypothèse, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = O_n$ et $N^{p-1} \neq O_n$

J'appliquerais bien le résultat de la question précédente, valable pour tout $k \geq 2$, à p , mais p n'est pas forcément supérieur ou égal à 2. Précisément...

Si $p \geq 2$: d'après 4)a), $N^* N^p = N^{p-1}$. Or, $N^p = O_n$. Donc $N^* O_n = N^{p-1}$, et il s'ensuit : $N^{p-1} = O_n$, ce qui n'est pas ! Donc p ne peut être supérieur ou égal à 2.

Dès lors, $p = 1$, et nous obtenons : $N^1 = O_n$. Autrement dit, N est la matrice nulle O_n . Nous avons donc établi que toute matrice nilpotente pseudo-inversible est nulle.

4)c) Est-ce que par hasard, N ne serait pas nilpotente ?

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times 1 & 1 \times (-1) + (-1) \times (-1) \\ 1 \times 1 + (-1) \times 1 & 1 \times (-1) + (-1) \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$$

Vous n'êtes évidemment pas tenus de faire figurer un tel calcul sur vos copies. Je le fais (cette fois) juste pour que vous puissiez vérifier votre calcul matriciel. De rien.

Avec $p = 2$, N vérifie : $N^p = O_2$ et $N^{p-1} = N^1 \neq O_2$.

D'après 4)b), si N était pseudo-inversible, elle serait égale à la matrice nulle O_2 , ce qui n'est pas le cas.

Nous pouvons donc en déduire que N n'est pas pseudo-inversible.

Exercice 20

*Si cette matrice a ses valeurs patentées,
ne laissez surtout pas son spectre vous hanter.*

Énoncé : (temps conseillé : 50 minutes) (***) d'après concours G2E 2023

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est valeur propre de M si et seulement si il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $MX = \lambda X$. Une telle matrice colonne est alors appelée vecteur propre de M , associé à la valeur propre λ .

On notera $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des entiers naturels et dont la somme des coefficients sur la première ligne est égale à la somme des coefficients sur la seconde ligne. Pour toute matrice A appartenant à $\mathcal{A}$, on note σ_A la somme des coefficients sur sa première ligne (et donc aussi la somme des coefficients sur sa seconde ligne).

1) Démontrer que : $\forall A \in \mathcal{A}, \sigma_A = 0 \iff A = O_2$

2) Montrer que si A et A' appartiennent à $\mathcal{A}$ alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A + kA' \in \mathcal{A}$.

3) Montrer que si A et A' appartiennent à $\mathcal{A}$, alors $AA' \in \mathcal{A}$

4) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$.

a) Montrer que σ_A est valeur propre de A et donner un vecteur propre associé.

b) Vérifier que $d - b = a - c$. Cette valeur commune étant notée δ_A , montrer que δ_A est valeur propre de A .

Remarques sur l'énoncé :

L'ensemble des matrices carrées de taille 2 dont les coefficients sont des entiers naturels aurait pu être noté $\mathcal{M}_2(\mathbb{N})$

Correction de l'exercice 20 :

1) Soit $A \in \mathcal{A}$.

Si $\sigma_A = 0$, la somme des deux coefficients sur la première ligne de A est nulle. Or, ces deux coefficients sont des entiers naturels (donc positifs). Ils sont donc tous les deux nuls. De même, la somme des coefficients sur la seconde ligne de A est nulle et, par le même argument, ils sont aussi tous les deux nuls. Tous les coefficients de la matrice A étant nuls, on a bien : $A = O_2$

Réciproquement, si $A = O_2$, la somme des coefficients sur la première ligne de A et celle sur sa seconde ligne sont toutes deux égales à 0. Par définition de σ_A , $\sigma_A = 0$

Nous avons bien établi : $\forall A \in \mathcal{A}, \sigma_A = 0 \iff A = O_2$

2) Soient A et A' deux matrices de $\mathcal{A}$. Explicitons-les pour effectuer notre calcul.

Il existe huit entiers naturels $a, b, c, d, a', b', c', d'$ tels que $a + b = c + d$, $a' + b' = c' + d'$, et tels que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

$$\text{Dès lors, pour tout entier naturel } k, A + kA' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ka' & kb' \\ kc' & kd' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ka' & b + kb' \\ c + kc' & d + kd' \end{pmatrix}$$

$A + kA'$ est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont des entiers naturels (par somme et produit d'entiers naturels).

$$\text{De plus : } a + ka' + b + kb' = a + b + k(a' + b') = c + d + k(c' + d') = c + kc' + d + kd'.$$

Donc $A + kA' \in \mathcal{A}$.

Nous avons bien montré que si A et A' appartiennent à $\mathcal{A}$ alors : $\forall k \in \mathbb{N}, A + kA' \in \mathcal{A}$

3) Soient encore $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux matrices appartenant à $\mathcal{A}$.

$$AA' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

AA' est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont bien des entiers naturels.

De plus, d'une part, la somme des coefficients sur la première ligne de AA' est :

$$aa' + bc' + ab' + bd' = a(a' + b') + b(c' + d') = a(c' + d') + b(a' + b'). \text{ Or, } c' + d' = a' + b' \text{ car } A' \in \mathcal{A}. \text{ Donc : } a(c' + d') + b(a' + b') = a(a' + b') + b(a' + b') = (a + b)(a' + b')$$

D'autre part, la somme des coefficients sur la seconde ligne de AA' est :

$$ca' + dc' + cb' + dd' = c(a' + b') + d(c' + d') = c(a' + b') + d(a' + b') = (c + d)(a' + b') = (a + b)(a' + b')$$

Enfin, si A et A' appartiennent à $\mathcal{A}$, alors $AA' \in \mathcal{A}$

4)a) Il faut trouver une matrice colonne non nulle $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (autrement dit telle que x et y ne sont pas tous les deux nuls) vérifiant : $AX = \sigma_A X$. Rappelons que $\sigma_A = a + b = c + d$. Allez, un peu d'imagination - il en faut, parfois - pour s'imaginer une opération matricielle qui ferait apparaître ce σ_A ...

Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. X est une matrice colonne non nulle de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

De plus, $AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \times 1 + b \times 1 \\ c \times 1 + d \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_A \\ \sigma_A \end{pmatrix} = \sigma_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $AX = \sigma_A X$.

σ_A est donc bien une valeur propre de A , et un vecteur propre associé est $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4)b) Par hypothèse, $a + b = c + d$ donc $d - b = a - c$. Bon, jusque là, ça va...
Par contre, trouver à l'œil nu un vecteur propre de A associé à la valeur propre δ_A est bien moins évident qu'en 4a). On peut essayer de tâtonner, tester par exemple $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, se rendre compte que ça ne marche pas, d'autres tests éventuellement... Bon, sinon, que faire ?
Systématisons notre recherche, à l'aide d'un système...

Cherchons x et y non tous les deux nuls tels que $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \delta_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, c'est-à-dire tels que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_A x \\ \delta_A y \end{pmatrix} \text{ ou encore : } \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_A x \\ \delta_A y \end{pmatrix}, \text{ ce qui équivaut à : } \begin{cases} ax + by = \delta_A x \\ cx + dy = \delta_A y \end{cases}$$

Et nous avons deux expressions de δ_A , à la fois égal à $a - c$ et à $d - b$, desquelles nous allons pouvoir jouer en fonction de ce qui nous arrange pour chaque équation du système.

$$\text{Autrement dit, nous voudrions : } \begin{cases} ax + by = ax - cx \\ cx + dy = dy - by \end{cases}, \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} by = -cx \\ cx = -by \end{cases}$$

ce qui se résume à la condition : $by = -cx$

Rappelons que nous ne voulons pas que x et y soient tous les deux nuls. Ce serait sympa de pouvoir exprimer l'un en fonction de l'autre, mais cela nécessiterait de diviser par b ou par c , et donc que l'un de ces deux derniers ne soit pas nul. Mais cela ne dépend pas de nous ! Distinguons donc les cas selon que b et c soient simultanément nuls ou non.

Si b et c sont tous les deux nuls : comme $a + b = c + d$, nous savons aussi : $a = d$. Donc

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2$. Dans ce cas, $\delta_A = a - 0 = a$. Et, quelle que soit la matrice colonne

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $AX = aX = \delta_A X$. En particulier, la matrice colonne non nulle $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

Si $b \neq 0$: la condition $by = -cx$ est équivalente à $y = -\frac{c}{b}x$

En particulier, la matrice colonne non nulle $X = \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix}$ convient.

Elle est bien non nulle car $b \neq 0$. On aurait aussi pu prendre, par exemple, même si je trouve ça plus laid : $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{c}{b} \end{pmatrix}$

Si $c \neq 0$: la condition $by = -cx$ est équivalente à $x = -\frac{b}{c}y$

En particulier, là aussi, la matrice colonne non nulle $X = \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix}$ convient.

Et, là encore, elle est bien non nulle car $c \neq 0$.

Dans tous les cas, il existe bien une matrice colonne X de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, non nulle, telle que $AX = \delta_A X$. Autrement dit*, δ_A est une valeur propre de A .

**Celui-là était fait exprès, pour finir en beauté ; c'est un tic irrésistible chez moi de mettre des « autrement dit » à tout va, j'aime bien... Tout comme cette manie insupportable de camoufler l'embarras d'une fin de phrase ou d'un adieu avec trois petits points. Bonnes vacances...*