Vers le supérieur

Version prépa MPSI-MP2I

Ayoub Hajlaoui

Avant-propos

Ce document comporte une vingtaine de problèmes mathématiques corrigés, tous extraits de sujets de concours de fin de CPGE (concours d'entrée aux grandes écoles), en filière MP. Ils sont remaniés de sorte que le programme de Terminale (spécialité et maths expertes) est le seul prérequis pour en venir à bout. À cette fin, des questions intermédiaires ont parfois été ajoutées au sujet original. Les notions, définitions ou résultats qui pourraient manquer à l'élève pour parvenir à la résolution lui sont donnés en hypothèse, ainsi que des indications supplémentaires et remarques utiles.

La première originalité de ce document réside donc dans sa nature de pont entre le rivage du lycée et celui des concours. En se concentrant principalement sur des notions vues par l'élève l'an passé (suites, fonctions, intégrales, entre autres), il lui propose de les mobiliser pour faire tomber des questions de sujets de concours, montrant ainsi de manière pratique l'intérêt de bien maîtriser ces notions, de les voir comme des alliées de taille qui l'épauleront tout au long de la prépa, plutôt que de présenter leur révision comme une corvée estivale. En outre, de par les nouveautés introduites ça et là pour affiner ces dernières, de par un grand nombre de questions abordant des notions générales de raisonnement et d'ensembles, ce recueil donne au lycéen un avant-goût de la glorieuse chevauchée qui l'attend, en lui mettant le pied à l'étrier. Il lui rappellera certaines de ses errances de l'an passé, tout en le préparant à l'année à venir - sans prétendre constituer une liste exhaustive de ce qui y sera vu.

Si ces exercices ne nécessitent pas d'autre prérequis que le programme de Terminale, ils s'avéreront, en pratique, difficiles pour un élève au sortir du lycée. Le degré d'atsuce nécessaire, les idées qu'il faut avoir pour faire tomber telle ou telle question, détonnent avec la plupart des exercices rencontrés en Terminale, dont les pistes étaient en général plus claires, et les résolutions plus « téléphonées ».

C'est ici qu'intervient la seconde originalité de ce document par rapport à d'autres recueils d'exercices corrigés, originalité qui constitue son atout majeur : la correction, très détaillée, insiste autant que possible sur « le pourquoi de l'idée » , la question de l'apparition de la première étincelle : à quoi telle situation nous fait-elle penser ? pourquoi est-il judicieux d'emprunter telle voie, de penser à telle astuce à ce moment-là plutôt qu'à un autre ? quel écueil faut-il éviter et comment voir que c'est un piège ? Vous trouverez de telles considérations en italique, en parallèle de la correction à proprement parler. Autant de didascalies rythmant la pièce de théâtre mathématique aux premières loges de laquelle vous êtes convié. Lever de rideau.

L’auteur en quelques mots

Lauréat de l’agrégation externe de mathématiques en 2020 (64 ème sur 323 admis et 3069 inscrits), docteur en mathématiques appliquées (université Paris VI), diplômé de l’école d’ingénieurs des Mines de Nancy et du master recherche MVA (Maths Vision Apprentissage) de l’ENS Cachan, je donne des cours de mathématiques (particuliers et en groupe, niveau lycée à prépa/L3) depuis 2008. Je suis également colleur en MPSI au lycée Charlemagne (Paris), lycée où j’ai moi-même effectué mes années de prépa MPSI/MP.

Parallèlement, je rédige des exercices de mathématiques (principalement niveau prépa et Terminale) ainsi que des corrigés particulièrement détaillés, que vous pouvez consulter librement sur `www.ayoub-et-les-maths.com`. J’y explique à l’élève non seulement le cheminement, mais aussi et surtout pourquoi il doit avoir telle idée à tel moment, pourquoi telle autre idée n’est pas appropriée, quel piège il faut éviter ; cela, dans l’optique de l’entraîner au raisonnement réel, et non à la mimique maladroite qui est l’apanage du plus grand nombre.

Sur ma chaîne youtube « Ayoub et les maths », vous trouverez également bon nombre de vidéos d’exercices corrigés niveau Terminale et prépa (parmi ceux que j’ai donnés en colle notamment), des séries thématiques pour vous familiariser avec des notions spécifiques comme le signe somme, le calcul matriciel, la valeur absolue, ainsi que des conseils plus généraux pour vous améliorer en mathématiques. Et même, une série dénommée « Où est l’arnaque » : ce sont des exercices corrigés avec des erreurs de raisonnement volontaires - révélées en fin de vidéo, bien sûr - pour tester votre vigilance mathématique...

Table des matières

Introduction

Les problèmes présentés dans ce document sont de longueur et difficulté variables. Une évaluation de cette dernière, subjective, est précisée à titre indicatif en début de chaque problème :
(*) facile   (**) moyen   (***) difficile   (****) particulièrement difficile
J'insiste sur le caractère subjectif de cette évaluation. Si elle s'appuie sur des paramètres tels la complexité des notions mises en oeuvre et le fait que les astuces à voir pour résoudre les questions de chaque exercice soient plus ou moins cachées, plus ou moins évidentes, l'observation empirique l'influence grandement : une sorte de moyenne vague de la difficulté ressentie par les nombreux élèves que j'ai pu côtoyer (cours particuliers, TD, colles...) face à un genre de question ou d'enchaînement de questions. Il s'agit aussi, pour moi, de comparer, en termes de difficulté, les exercices de ce document les uns aux autres.
Pas de panique, donc, si vous butez face à un exercice classé comme « moyen » ou « facile » . Faites de votre mieux dans le temps imparti, puis lisez attentivement la correction.

En parlant de temps : pour chaque problème, un temps de travail préconisé est indiqué. Il ne correspond pas forcément au temps au bout duquel l'exercice doit être résolu, mais plutôt au temps de recherche au bout duquel il devient raisonnable de commencer à regarder la correction. Il peut en effet être pertinent de vous imposer de réfléchir en temps limité, pour vous entraîner aux conditions d'examen. Mais si tel énoncé vous intrigue particulièrement, si vous vous sentez prêt de le faire tomber, si vous aimeriez en venir à bout (peut-être pour des raisons de fierté personnelle, peut-être pas), quitte à lui consacrer plus de temps que les autres, n'hésitez surtout pas. C'est en jouant de ces deux modes temporels que l'on peut s'améliorer durablement en mathématiques. Une telle idée est développée plus en détail dans cet article.

Chaque énoncé est suivi de « remarques sur l'énoncé ». Il ne s'agit nécessairement d'indications sur la résolution, mais plutôt de précisions sur les notations introduites par l'énoncé, ou de rappels de concepts mathématiques utiles.

La correction à proprement parler est en caractères normaux. Les passages en italique correspondent à des commentaires sur cette correction. Principalement, le fameux « pourquoi de l'idée » , cette substance fugace décrite tant bien que mal dans l'avant-propos. Mais aussi, par moments, des réflexions sur d'autres méthodes que celle choisie dans la correction, des analogies avec d'autres situations, des discussions sur telle ou telle erreur courante commise par les élèves à tel endroit. Plus rarement, deux ou trois confidences sur mes choix éditoriaux : pourquoi ai-je reformulé ainsi la question originellement présente dans le sujet ? Pourquoi ai-je ajouté telle question ? Vous mettre à la place du « concepteur » du sujet (même si le titre qui me conviendrait le mieux ici serait celui de reformulateur), tenter d'en comprendre la cohérence, vous attacher aux liens entre les questions et à leur fil conducteur peut vous aider à vous sortir du labyrinthe.

Place, maintenant, à de brèves considérations d'ordre général, qui seront complétées au besoin par les remarques sur chaque énoncé. Votre aventure mathématique dans le supérieur consistera en grande partie en la manipulation d'**assertions** . Ce sont des phrases syntaxiquement correctes (autrement dit, qui ont du sens) et qui sont soit vraies, soit fausses.

Comment ça, « soit vraies, soit fausses » ? N'est-ce pas trop général comme définition ? Toute phrase ne deviendrait-elle pas une assertion ?
Certainement pas, voyez plutôt :

- A : « $3^2 + 12 \times 7$ » n'est pas une assertion, car dire qu'elle serait vraie ou fausse n'aurait aucun sens.
- B : « $\forall x + \mathbb{R},\ x^2 \leq 2$ » n'est pas une assertion, car elle n'est pas syntaxiquement correcte.
- C : « $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 > 0$ » est une assertion. C'est même une assertion vraie.
- D : « $\exists x \in \mathbb{R},\ e^x \leq 0$ » est une assertion. C'est une assertion fausse.
- D : « $x + 7 \geq 2$ » est une assertion. C'est une assertion dont la véracité dépend du choix du paramètre x. Pour l'anecdote, une telle assertion est appelée un prédicat.

Rappelons la signification des symboles $\forall$ et $\exists$:

- $\forall$ signifie : « pour tout », ou encore « quel que soit ». L'assertion C se lit donc : « pour tout réel x non nul, $x^2 > 0$ ». Ou encore, de manière équivalente : « quel que soit le réel x non nul, $x^2 > 0$ »

- $\exists$ signifie « il existe ». L'assertion D se lit donc : « il existe un réel x tel que $e^x \leq 0$ » Voyez comment j'ai intercalé un « tel que » à la place de la virgule, pour que la phrase ait du sens en français.

Si A et B sont deux assertions mathématiques, « $A \Longrightarrow B$ » (se lit « A implique B ») veut dire que si A est vrai, alors B est vrai.
Autrement dit, A est une condition suffisante à B.
Il suffit que A soit vrai pour que B soit vrai.
Autrement dit, B est une condition nécessaire à A.
A ne peut pas être vrai sans que B ne soit vrai.

« $A \Longleftrightarrow B$ » (se lit « A équivaut à B » ou « A est équivalent à B ») veut dire que nous avons à la fois $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$. Autrement dit : A est vrai si et seulement si B est vrai.

La négation de « $A \Longrightarrow B$ » , notée non$(A \Longrightarrow B)$, est « A et non(B) ».
Autrement dit, A n'entraîne pas B puisque A est réalisé mais pas B

Exercice 1

Avec force prudence en malaxant la suite,
montrons l'équivalence entre ces deux limites.

Énoncé : (temps conseillé : 1 h 15 min) (****) *d'après Mines-Ponts 2009 MP Maths 2*

On rappelle qu'une suite (u_n) converge vers un réel l si et seulement si :
$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_\epsilon\ , |u_n - l| < \epsilon$

Soit $\mu \in \mathbb{R}_+^*$, et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. On veut montrer l'équivalence suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = 1$

1) Montrer que si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = 1$

2) On suppose maintenant : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = 1$

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ \mu]$ par $f(x) = \dfrac{\mu - x}{x + \mu + 1}$.

a) Etudier les variations de f sur $[0\ ;\ \mu]$.

b) Montrer que si une suite (u_n) converge vers un réel l, alors pour tout réel $l' < l$, il existe un entier naturel N tel que : $\forall n \geq N,\ u_n > l'$

c) Montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ \dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} > \dfrac{\mu}{\mu + 1}$

d) Montrer que pour tout $n \geq n_0$, $\lambda_n > \mu$, puis conclure.
On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

Remarques sur l'énoncé :

Rappelons au cas où que $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des réels positifs. C'est donc $[0;+\infty[$
Quant à $\mathbb{R}_+^*$, c'est l'ensemble des réels positifs non nul. C'est donc l'ensemble des réels strictement positifs, c'est-à-dire $]0;+\infty[$.

Rappelons aussi la signification de ces symboles mis en jeu :

- $\forall$ signifie : « pour tout », ou encore « quel que soit ».

- $\exists$ signifie : « il existe »
- $\in$ signifie « appartient ».

La définition de convergence avec les quantificateurs rappelée par l'énoncé est rarement présentée en Terminale (ou alors, de manière succinte, sans insister dessus). A moins que vous ne soyez particulièrement familier avec cette définition, et que vous n'ayez eu l'occasion de la manipuler assez, cet énoncé, bien que court, risque de vous donner du fil à retordre...

« $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_\epsilon\ , |u_n - l| < \epsilon$ » donne, en français : « pour tout réel epsilon strictement positif, il existe un entier naturel N_ϵ tel que pour tout (entier naturel) n supérieur ou égal à ce N_ϵ , $|u_n - l| < \epsilon$ (autrement dit la distance entre u_n et l est inférieure à ϵ) ».
Dire $|u_n - l| < \epsilon$ revient à dire $l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$

L'idée est donc la suivante : les termes de la suite peuvent être rendus aussi proches que l'on veut de l à condition de prendre des rangs n assez grands.

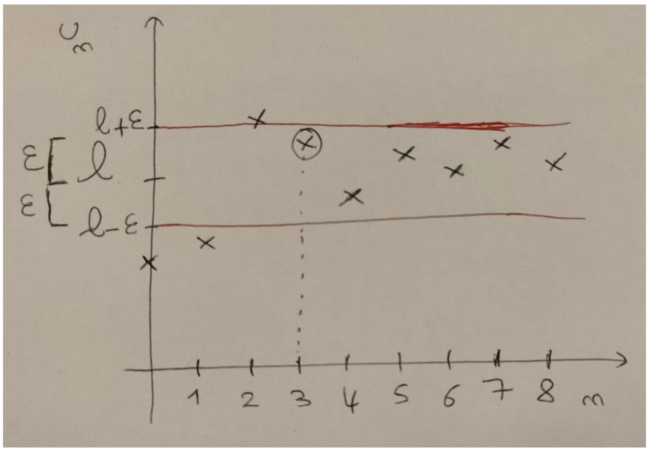


Schéma à main levée (je pense que ça se voit...) représentant les premiers termes d'une suite (u_n) convergeant vers l

Le schéma ci-dessus est censé représenter les premiers termes d'une suite convergeant vers l. Quel que soit le « faisceau » de rayon non nul ($\epsilon > 0$) centré autour de l (correspondant à l'intervalle $]\ l - \epsilon;\ l + \epsilon\ [$ en ordonnée), il existe un rang N_ϵ à partir duquel tous les termes de la suite sont emprisonnés dans le faisceau.

Et ce, quel que soit le rayon ϵ du faisceau, du moment qu'il est non nul...
Dans cet exemple, pour le ϵ de la figure, $N_\epsilon = 3$ semble convenir (tous les entiers supérieurs ou égaux à 3 aussi, d'ailleurs...). Pour tous les n supérieurs ou égaux à ce N_ϵ, on voit effectivement : $l-\epsilon < u_n < l+\epsilon$ (autrement dit, $-\epsilon < u_n - l < \epsilon$, ce qui équivaut à dire : $|u_n - l| < \epsilon$)

Une variante légèrement plus rigoureuse de l'écriture avec les quantificateurs (bien que la précédente soit couramment utilisée et tolérée) est :
$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq N_\epsilon \implies |u_n - l| < \epsilon$
Pourquoi plus rigoureuse ? Parce que dans la première, lorsqu'on écrit $\forall n \geq N_\epsilon$, on n'indique pas la nature du n en question. Un correcteur de mauvaise foi pourrait faire semblant de comprendre que les n dont on parle seraient des réels en général (alors que le contexte indique clairement que ce sont plus précisément des entiers naturels mais bon, que pouvons-nous contre la mauvaise foi...)

Vous pourrez rencontrer d'autres variantes de cette définition parlant plutôt de N au lieu de N_ϵ (ce qui est tout à fait permis, mais j'aime bien N_ϵ, ça nous rappelle que ce rang dépend de ϵ), ou encore mettant un signe $\leq$ à la place de $<$ (ce qui ne change rien à la définition, grâce au $\forall\ \epsilon$ du début)

Finissons ces remarques avec un rappel sur la notion de divergence vers $+\infty$.
Dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$ revient à dire : $\forall\ M > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ \lambda_n \geq M$

En français : « pour tout réel M strictement positif, il existe un entier naturel n_0 entier naturel tel que pour tout (entier naturel) n supérieur ou égal à ce n_0 , $\lambda_n \geq M$ »
Autrement dit, λ_n peut être rendu aussi grand que l'on veut (plus grand que n'importe quel M) pourvu que n soit assez grand.

Correction de l'exercice 1 :

1) *La valeur absolue me dérange dans mon calcul de limite... Mais si (λ_n) diverge vers $+\infty$, λ_n peut être rendu aussi grand que l'on veut (et, en particulier, plus grand que μ) pourvu que n soit assez grand...*

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, alors il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ \lambda_n \geq \mu$
Autrement dit : $\forall n \geq n_0,\ \lambda_n - \mu \geq 0$, et donc $|\lambda_n - \mu| = \lambda_n - \mu$

Voilà, on a pu se débarrasser de la valeur absolue. À partir d'un certain rang certes, mais cela ne nous dérange pas vu que le résultat auquel il faut aboutir est une limite lorsque n tend vers $+\infty$.
Pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = \dfrac{\lambda_n - \mu}{\lambda_n + \mu + 1}$

Et il nous faut la limite quand n tend vers $+\infty$ de cette quantité, sachant : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$.
Factorisons donc au numérateur et au dénominateur par le terme le plus « fort » en $+\infty$
C'est λ_n bien sûr, étant donné que les autres termes sont constants (et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$).
Mais cette factorisation par λ_n va faire apparaître des divisions par λ_n...

Pour tout $n \geq n_0$, $\lambda_n \geq \mu$ et $\mu > 0$ d'après l'énoncé. Donc : pour tout $n \geq n_0$, $\lambda_n > 0$ et, a fortiori, $\lambda_n \neq 0$.
Ouf, la factorisation par λ_n est licite ! Ici, il me faut confesser avoir modifié (entre autres bien entendu) une hypothèse de l'énoncé originel pour vous simplifier un peu la vie : celui-ci prenait comme hypothèse $\mu \geq 0$ (et non pas $\mu > 0$). Dans la situation, où μ peut être nul, rappeler que $\lambda_n \geq \mu$ à partir du rang n_0 ne suffirait plus pour permettre la factorisation par λ_n. Il faudrait aussi justifier que $\lambda_n > 0$ à partir d'un certain rang : le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$ le garantit.

Donc, pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = \dfrac{\lambda_n\left(1 - \dfrac{\mu}{\lambda_n}\right)}{\lambda_n\left(1 + \dfrac{\mu+1}{\lambda_n}\right)} = \dfrac{1 - \dfrac{\mu}{\lambda_n}}{1 + \dfrac{\mu+1}{\lambda_n}}$

Enfin, par quotients et sommes de limites, nous obtenons : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = 1$

$\boxed{\text{Nous avons bien montré que si : } \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty, \text{ alors : } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = 1}$

Je présente une manière alternative, relativement astucieuse, de venir à bout d'une telle limite à la fin de cette vidéo.

2)a) *Une sympathique question étude de fonction... f est bien définie sur $[0\ ;\ \mu]$ puisque c'est une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynomiales) dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.*

f est dérivable sur $[0\ ;\ \mu]$ comme fonction rationnelle définie sur cet intervalle.
Pour tout $x \in [0\ ;\ \mu]$, $f'(x) = \dfrac{-1 \times (x+\mu+1) - (\mu - x) \times 1}{(x+\mu+1)^2} = \dfrac{-x-\mu-1-\mu+x}{(x+\mu+1)^2} = \dfrac{-2\mu-1}{(x+\mu+1)^2}$
Or, pour tout $x \in [0\ ;\ \mu]$, $(x+\mu+1)^2 > 0$ et (puisque $\mu > 0$) $-2\mu - 1 < 0$
Donc : $\forall x \in [0\ ;\ \mu]$, $f'(x) < 0$

$\boxed{f \text{ est donc strictement décroissante sur } [0\ ;\ \mu]}$

En outre, un calcul simple donne : $f(0) = \dfrac{\mu}{\mu+1}$ et $f(\mu) = 0$

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	0		μ
f	$\frac{\mu}{\mu+1}$	$\searrow$	0

Certes, l'énoncé ne nous demande pas explicitement le tableau de variation de f ni ses valeurs en 0 et en μ. Mais les résultats de cette question 2a vont manifestement servir pour la suite (sinon, ce serait un sacré intrus...). Autant, puisque cela ne nous coûte quasiment rien en termes d'efforts de calcul, avoir un tableau de variations complet.

2)b) *Un résultat relativement intuitif ; une démonstration assez technique (en tous cas pour un élève au sortir de la Terminale).*
Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel l, et soit l' un réel tel que $l' < l$.
Par définition (rappelée par l'énoncé), on a : $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_\epsilon$, $|u_n - l| < \epsilon$
Autrement dit : $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_\epsilon$, $l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$

Nous disposons donc d'une propriété valable pour tout $\epsilon > 0$. A nous, donc, d'en choisir un qui convienne à nos objectifs. Dans l'encadrement donné par cette propriété, c'est la partie

« ... $< u_n$ » qui nous intéresse (puisque nous voulons montrer qu'il existe un rang à partir duquel u_n est supérieur à...) Il nous suffit de trouver un $\epsilon > 0$ tel que $l - \epsilon = l'$, et le tour est joué !

Posons $\epsilon = l - l'$. Comme $l' < l$, on a bien $\epsilon > 0$. D'où l'existence d'un entier naturel N tel que : $\forall n \geq N$, $l - (l - l') < u_n < l + (l - l')$, c'est-à-dire : $l' < u_n < 2l - l'$

En particulier *(en ne gardant que la partie gauche de l'encadrement)*, nous avons bien prouvé l'existence d'un entier naturel N tel que : $\forall n \geq N,\ u_n > l'$.

J'ai appelé l'entier naturel N, et pas N_ϵ. Je fais ce que je veux... En réalité, c'était pour coller à ce que demande l'énoncé, qui parle de l'existence de N tel que... À la rigueur, si je l'avais appelé N_ϵ au départ, rien ne m'aurait empêché, après avoir prouvé qu'un tel entier convient, de le renommer N.

En conclusion, nous avons bien montré que si une suite (u_n) converge vers un réel l, alors pour tout réel $l' < l$: $\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n > l'$

2)c) *Oh, $\dfrac{\mu}{\mu+1}$, tu me dis quelque chose... Tu es le résultat d'un de mes calculs de 2)a). Plus précisément, tu es la valeur de $f(0)$. Mais ce constat me sera-t-il utile maintenant ? Pas sûr vu ce qu'on me demande, et vu la question précédente..*

Nous savons $\dfrac{\mu}{\mu+1} < 1$ (car $\mu < \mu + 1$, inégalité dont nous pouvons diviser chacun des membres par $\mu + 1 > 0$). Et nous savons aussi, par hypothèse posée en début de 2) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = 1$.

Donc d'après 2)b), il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ \dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} > \dfrac{\mu}{\mu+1}$

Oui, c'est tout. C'est une simple application de 2)b), en prenant pour suite (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1}$, en posant $l = 1$ (qui n'est autre que la limite de u), et $l' = \dfrac{\mu}{\mu+1}$. On a bien, dans ce cas, $l' < l$, ce qui a été mis en évidence. Rien ne nous oblige à nommer ainsi chacun des protagonistes (voilà (u_n) ici, voilà l, voilà l'...) du moment qu'ils sont clairs et que les hypothèses de 2)b) sont rigoureusement vérifiées. Toutefois, si identifier ainsi chacun des intervenants de la 2)c) à un élément de 2)b) peut vous aider à ne pas vous tromper dans les hypothèses à vérifier, ne vous en privez pas.

2)d) *C'est le moment ou jamais (vu que l'exercice touche à sa fin) d'utiliser le lien entre la fonction f et $\dfrac{\mu}{\mu+1}$... J'aimerais voir en $\dfrac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1}$ l'image de λ_n par f, mais la valeur absolue au numérateur m'en empêche. En fait, pour tout entier naturel n, si $\lambda_n \leq \mu$, $|\lambda_n-\mu| = \mu-\lambda_n$, et dans ce cas, $\dfrac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1} = \dfrac{\mu-\lambda_n}{\lambda_n+\mu+1} = f(\lambda_n)$. Mais vu le tableau de variation de f sur $[0\ ;\ \mu]$ (intervalle auquel appartient λ_n dans ce cas), $f(\lambda_n) \leq \dfrac{\mu}{\mu+1}$...*

L'énoncé nous propose d'utiliser un raisonnement par l'absurde. Autrement dit, de supposer le contraire de ce que nous voulons démontrer, pour aboutir à une absurdité.

La négation de « tous les chats sont gris » est « il existe un chat qui n'est pas gris » ...

Par l'absurde, supposons qu'il existe un entier naturel $n \geq n_0$ tel que $\lambda_n \leq \mu$
Nous supposons donc la négation de : $\forall n \geq n_0,\ \lambda_n > \mu$. Et si nous aboutissons à une absurdité, nous aurons bien montré : $\forall n \geq n_0,\ \lambda_n > \mu$

Nous avons alors : $\lambda_n - \mu \leq 0$, c'est-à-dire : $|\lambda_n-\mu| = -(\lambda_n-\mu) = \mu-\lambda_n$

Dès lors, $\dfrac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1} = \dfrac{\mu-\lambda_n}{\lambda_n+\mu+1} = f(\lambda_n)$

Or, $\lambda_n \leq \mu$ (par hypothèse). Et $\lambda_n \geq 0$ par hypothèse initiale de l'énoncé. Donc $\lambda_n \in [0\ ;\ \mu]$.
Or, d'après le tableau de variation obtenu en 2a), pour tout réel $x \in [0\ ;\ \mu]$, $f(x) \leq \dfrac{\mu}{\mu+1}$
En particulier, $f(\lambda_n) \leq \dfrac{\mu}{\mu+1}$. Autrement dit : $\dfrac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1} \leq \dfrac{\mu}{\mu+1}$.

Mais cette inégalité est absurde, vu que $n \geq n_0$, et d'après le résultat de 2)c).
Notre supposition de départ (à savoir : « il existe un entier naturel $n \geq n_0$ tel que $\lambda_n \leq \mu$ ») est donc fausse. Nous pouvons donc en déduire : $\boxed{\forall n \geq n_0,\ \lambda_n > \mu}$

« Puis conclure. » Comment ça, conclure ? L'énoncé nous annonce au départ qu'on veut (enfin, qu'il veut ; vous, vous n'avez rien demandé...) montrer l'équivalence :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1} = 1$
En 1), nous avons montré l'implication : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty \implies \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1} = 1$
En 2), nous avons supposé $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1} = 1$ et voulons aboutir à : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, pour

établir l'implication réciproque de la précédente. Mais à quoi pourrait bien servir ce que nous venons de démontrer ? ($\forall n \geq n_0,\ \lambda_n > \mu$) A priori, ce n'est pas du tout suffisant pour arriver à $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$ ...

Pour tout $n \geq n_0,\ \lambda_n > \mu$, donc $|\lambda_n - \mu| = \lambda_n - \mu$, et donc : $\dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = \dfrac{\lambda_n - \mu}{\lambda_n + \mu + 1}$

Comme nous savons : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = 1$, nous pouvons en déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda_n - \mu}{\lambda_n + \mu + 1} = 1$

Mais comment accéder à la limite de (λ_n) ? Peut-être essayer de transformer l'expression de ce quotient dont nous connaissons la limite ?

Pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{\lambda_n - \mu}{\lambda_n + \mu + 1} = \dfrac{\lambda_n + \mu + 1 - 2\mu - 1}{\lambda_n + \mu + 1} = \dfrac{\lambda_n + \mu + 1}{\lambda_n + \mu + 1} + \dfrac{-2\mu - 1}{\lambda_n + \mu + 1} = 1 - \dfrac{2\mu + 1}{\lambda_n + \mu + 1}$

L'astuce consiste en le fait de faire apparaître le dénominateur au numérateur (et, bien sûr, d'assumer en soustrayant ce $\lambda_n + \mu + 1$ que nous avons additionné) pour chasser λ_n du numérateur. Le chasser du dénominateur paraissait plus compliqué.
Si on n'a pas vu cette astuce, on peut donner un nom à la quantité $\dfrac{\lambda_n - \mu}{\lambda_n + \mu + 1}$, en posant par exemple $v_n = \dfrac{\lambda_n - \mu}{\lambda_n + \mu + 1}$, et tenter d'exprimer λ_n en fonction de v_n (nous savons que (v_n) converge vers 1)

Nous avons donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{2\mu + 1}{\lambda_n + \mu + 1} = 1$. Puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{2\mu + 1}{\lambda_n + \mu + 1} = 0$ (par somme)

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\mu + 1}{\lambda_n + \mu + 1} = 0$ *Le λ_n qui m'intéresse est au dénominateur...*

Et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2\mu + 1}{\lambda_n + \mu + 1} > 0$ *La limite précédente est donc un « 0^+ »*

Par quotient de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda_n + \mu + 1}{2\mu + 1} = +\infty$

Enfin, par produit *(en multipliant par $2\mu + 1 > 0$...)* et somme *(...puis en ajoutant $-\mu - 1$)* de limites, nous obtenons : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty}$

Nous avons donc établi, en 1) puis en 2), les deux implications permettant d'établir l'équivalence suivante :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = 1}$$

Exercice 2

Parfumez votre été d'une expression rageante :
fuir la difficulté, c'est prendre la tangente.

Énoncé : (temps conseillé : 45 min) (**) *d'après Centrale 2000 MP Maths 1*

Soit $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 2, et soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R},\ P'(x) \neq 0\}$

1) Justifier sans calcul que pour tout x appartenant à Ω, la tangente en $M\big(x, P(x)\big)$ à la courbe de P coupe l'axe des abscisses.

2) Pour tout a appartenant à Ω, on définit $N_P(a)$ comme étant l'abscisse de l'intersection de la tangente en $M\big(a, P(a)\big)$ à la courbe de P avec l'axe des abscisses. Montrer que : $\forall a \in \Omega,\ N_P(a) = a - \dfrac{P(a)}{P'(a)}$

3) Justifier que la fonction N_P est dérivable sur Ω et déterminer N'_P

4) Justifier qu'il existe un réel A tel que $]\,A;\ +\infty\,[\subset \Omega$

5) On note n le degré de P. Déterminer, en fonction de n : $\lim\limits_{x\to+\infty} N_P(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} N'_P(x)$

On rappelle qu'un polynôme de degré n ($n \in \mathbb{N}$) a au plus n racines réelles.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : si A et B sont deux fonctions polynomiales non nulles, de degrés respectifs n et p (avec n et $p \in \mathbb{N}$) telles que les termes de plus haut degré de $A(x)$ et $B(x)$ sont respectivement $a_n x^n$ et $b_p x^p$ (avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$), alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{A(x)}{B(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}$

Au cas où, voici des exemples de terme de plus haut degré : dans l'expression $3x^5 - 2x^2 + 7$, de degré 5, le terme de plus haut degré est $3x^5$. Dans l'expression $15x^4 - 4x$, de degré 4, qui, soit dit en passant, s'obtient en dérivant la première), le terme de plus haut degré est $15x^4$.

Remarques sur l'énoncé :

Ω est l'ensemble des réels x tels que $P'(x) \neq 0$, c'est-à-dire en lesquels P' ne s'annule pas.

Si A et B sont deux ensembles, $A \subset B$ se lit « A est inclus dans B » , et veut tout simplement dire que tout élément de A est aussi un élément de B.

Certains ont peut-être vu en Terminale le résultat rappelé en italique (même s'il est a priori hors programme). Il s'obtient en factorisant le numérateur $A(x)$ et le dénominateur $B(x)$ par leurs termes de plus haut degré - ce que vous faisiez justement en Terminale pour lever des indéterminations dues à des quotients de fonctions polynomiales en l'infini.

Vous pourrez avoir besoin des résultats suivants (assez intuitifs) portant sur la manipulation des termes de plus haut degré d'expressions polynomiales :

• le terme de plus haut degré du produit de deux polynômes non nuls est tout simplement le produit de leurs termes de plus haut degré. Par exemple, en multipliant $3x^4 - x^2 - 7$, dont le terme de plus haut degré est $3x^4$, et $-2x+3$, dont le terme de plus haut degré est $-2x$, on obtient : $(3x^4 - x^2 - 7)(-2x+3) = -6x^5 + 9x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 14x - 21$, dont le terme de plus haut degré est $-6x^5$, qui n'est autre que $3x^4 \times (-2x)$. Autrement dit, pour obtenir ce terme de plus haut degré de $(3x^4 - x^2 - 7)(-2x+3)$, je n'avais pas besoin d'effectuer tout le calcul, mais simplement de faire le produit des termes de plus haut degré de $3x^4 - x^2 - 7$ et de $-2x+3$

• si deux polynômes ont des degrés différents, le degré de leur somme est égal au maximum de leurs degrés respectifs, et le terme de plus haut degré de leur somme est égal au terme de plus haut degré de celui des deux qui a le plus grand degré. Par exemple, avec $P_1(x) = 3x^4 - 5x^3 + 1$ et $P_2(x) = 15x - 4$, P_1 est de degré 4 et P_2 de degré 1. Pour tout réel x, $P_1(x) + P_2(x) = 3x^4 - 5x^3 + 15x - 3$. Cette expression est de degré 4 (qui correspond bien au maximum entre 4 et 1) et son terme de plus haut degré est $3x^4$ (qui est le terme de plus haut degré de P_1, celui des deux qui a le plus grand degré)

• si deux polynômes non nuls sont de même degré, le degré de leur somme est inférieur ou égal à ce degré : il peut être strictement inférieur s'il y a des simplifications. Par exemple, avec $P_1(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$ et $P_2(x) = -3x^4 + 15x - 4$: $P_1(x) + P_2(x) = -5x^2 + 15x - 3$. Cette dernière expression n'est pas de degré 4 mais 2.

Au cours de l'exercice, vous aurez peut-être à vous demander dans quelle situation la somme de deux polynômes de même degré est de même degré que ces deux polynômes (auquel cas le terme de plus haut degré de la somme est facile à obtenir...)

Correction de l'exercice 2 :

1) *Il suffit d'expliquer que la tangente en question n'est pas parallèle à l'axe des abscisses...*

Pour tout x appartenant à Ω, par définition, $P'(x) \neq 0$. Or, $P'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de P au point d'abscisse x. Cette tangente ayant donc un coefficient directeur non nul, elle n'est pas parallèle à l'axe des abscisses, et le coupe nécessairement.

2) *« Pour tout a appartenant à Ω, on définit $N_P(a)$ comme étant l'abscisse de l'intersection de la tangente en $M\big(a, P(a)\big)$ à la courbe de P avec l'axe des abscisses. » Cette phrase mérite d'être décortiquée. Pour un réel a de Ω, la courbe de P admet une tangente en a, c'est-à-dire au point M de coordonnées $\big(a, P(a)\big)$. D'après la question 1), cette tangente coupe l'axe des abscisses en un certain point : $N_P(a)$ est tout simplement l'abscisse de ce point d'intersection.*

Soit $a \in \Omega$. Notons T_a la tangente à la courbe de P au point d'abscisse a. T_a a pour équation $y = P'(a)(x-a) + P(a)$.

Le point d'intersection de T_a avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $\big(N_P(a), 0\big)$

Ben oui, son ordonnée est nulle, vu qu'il est sur l'axe des abscisses...

Comme ce point appartient à la droite T_a, ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite. Autrement dit : $P'(a)\big(N_P(a) - a\big) + P(a) = 0$. *Isolons tout simplement $N_P(a)$...*

Donc : $P'(a)\big(N_P(a) - a\big) = -P(a)$. Comme a appartient à Ω, $P'(a) \neq 0$.

Les choses sont bien faites, ça nous permet de diviser par $P'(a)$.

D'où : $N_P(a) - a = -\dfrac{P(a)}{P'(a)}$, ce qui nous permet enfin de conclure : $\boxed{\forall a \in \Omega,\ N_P(a) = a - \dfrac{P(a)}{P'(a)}}$

Une petite confession. L'énoncé originel demandait de montrer : $\forall x \in \Omega,\ N_P(x) = x - \dfrac{P(x)}{P'(x)}$. J'ai hésité à garder ce choix de lettre, mais ça aurait été la pagaille à coup sûr au moment de parler de l'équation de la tangente T_x (et non T_a, du coup...) au point d'abscisse x : il aurait fallu, dans ce cas, faire attention au fait que x ne peut pas être pris comme abscisse d'un point générique de la tangente (comme ce serait le cas pour une droite d'équation $y = \alpha x + \beta$). La difficulté aurait pu être contournée, en posant par exemple ainsi l'équation de la droite $T_x : Y = P'(x)(X - x) + P(x)$ (le point générique parcourant la droite aurait pour coordonnées (X, Y)).

Ou alors - option qui me semble plus satisfaisante - prendre l'initiative de renommer le x initial de l'énoncé, en déterminant $N_P(a)$ pour $a \in \Omega$ (afin de garder x pour l'équation de la droite), quitte, en toute-dernière étape, à passer de : $\forall a \in \Omega,\ N_P(a) = a - \dfrac{P(a)}{P'(a)}$ à : $\forall x \in \Omega,\ N_P(x) = x - \dfrac{P(x)}{P'(x)}$. L'égalité étant valable pour tout a de Ω, on peut aussi dire qu'elle est valable pour tout x de Ω. Dans ces deux dernières expressions, on dit que a et x sont des variables muettes.

Bref, j'ai préféré vous éviter toutes ces circonvolutions en vous demandant l'expression de $N_P(a)$ plutôt que celle de $N_P(x)$. En choisissant cette lettre a dont vous avez en général l'habitude pour vos équations de tangente... De rien.

3) Pour tout $x \in \Omega$, $N_P(x) = x - \dfrac{P(x)}{P'(x)}$. P et P' sont des fonctions polynomiales et P' ne s'annule pas sur Ω (par définition de cet ensemble). Par quotient et somme, nous pouvons donc en déduire que $\boxed{N_P \text{ est dérivable sur } \Omega.}$

Pour tout $x \in \Omega$, $N_P'(x) = 1 - \dfrac{P'(x) \times P'(x) - P(x)P''(x)}{(P')^2(x)} = 1 - \dfrac{(P')^2(x) - P(x)P''(x)}{(P')^2(x)}$

Comment simplifier cette expression ? Il paraît judicieux de séparer le numérateur en deux. (On pourrait aussi tout mettre sous le même dénominateur)

Donc : $\forall x \in \Omega,\ N_P'(x) = 1 - \dfrac{(P')^2(x) - P(x)P''(x)}{(P')^2(x)} = 1 - \left(\dfrac{(P')^2(x)}{(P')^2(x)} - \dfrac{P(x)P''(x)}{(P')^2(x)}\right)$
$= 1 - \left(1 - \dfrac{P(x)P''(x)}{(P')^2(x)}\right) = \dfrac{P(x)P''(x)}{(P')^2(x)}$ *Un oubli de parenthèses eût été fatal...*

Nous avons montré : $\boxed{\forall x \in \Omega,\ N_P'(x) = \dfrac{P(x)P''(x)}{\left(P'\right)^2(x)}}$ $\quad$ $\left(P'\right)^2(x)$*, c'est* $\left(P'(x)\right)^2$

On ne voit pas trop comment faire plus simple...

4) *Ω est l'ensemble des réels x tels que $P'(x) \neq 0$. L'ensemble des réels qui n'appartiennent pas à Ω est donc tout simplement l'ensemble des réels x tels que $P'(x) = 0$. Mais qui sont ces réels ? Comment les appelle-t-on ? Ce sont les racines du polynôme P', tout simplement. Oh, l'énoncé me rappelle un résultat sur le nombre de racines d'un polynôme de degré donné...*

Par hypothèse, la fonction polynomiale P est de degré supérieur ou égal à 2. La fonction polynomiale P' est donc de degré $n-1$, supérieur ou égal à 0. Elle admet donc

au plus $n-1$ racines. *Donc au maximum un nombre fini de racines !*
• Si P' admet au moins une racine, ses racines sont en nombre fini, et on peut noter A la plus grande de ces racines. Par définition, aucun réel x strictement supérieur à A n'est racine de P'. Autrement dit : $\forall x > A,\ P'(x) \neq 0$. Ou encore : $\forall x > A,\ x \in \Omega$.
Dans ce cas, on a bien : $]\ A;\ +\infty\ [\subset \Omega$
• Si P' n'admet aucune racine, par définition : $\Omega = \mathbb{R}$. Dans ce cas, pour n'importe quel réel A, on a bien : $]\ A;\ +\infty\ [\subset \Omega$. En particulier (par exemple) $]\ 0;\ +\infty\ [\subset \Omega$
Ce second cas, bien que simple, était nécessaire à traiter : il ne faut pas oublier qu'un polynôme peut n'avoir aucune racine réelle. Par exemple : X^2+1 *et* X^4+7

$\boxed{\text{Dans tous les cas, on a bien montré l'existence d'un réel } A \text{ tel que }]\ A;\ +\infty\ [\subset \Omega}$

5) *Le résultat de la question précédente est crucial pour pouvoir parler de limite en* $+\infty$ *de* N_P *et de* N'_P. *Si, par exemple,* Ω *(ensemble sur lequel* N_P *est défini et dérivable) avait été de la forme* $[a;b]$ *avec a et b réel, comment auriez-vous voulu faire tendre x vers* $+\infty$ *dans l'expression de* $N_P(x)$ *(ou de* $N'_P(x)$*) ? La question de la limite en* $+\infty$ *n'a de sens que pour une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme* $]\ A;\ +\infty\ [$. *Autrement dit, pour une fonction dont le domaine de définition est ce que l'on appelle un voisinage de* $+\infty$ *(ce qui nous permet, pour faire simple, « d'approcher* $+\infty$ *» à notre guise).*

Nous aimerions bien entendu pouvoir utiliser le résultat donné par l'énoncé sur la limite en $+\infty$ *d'un quotient de fonctions polynomiales. Mais l'expression de* $N_P(x)$ *ne nous permet pas de le faire en l'état...*

Pour tout $x \in \Omega,\ N_P(x) = x - \dfrac{P(x)}{P'(x)} = \dfrac{xP'(x) - P(x)}{P'(x)}$

Là, nous avons bien deux expressions polynomiales au numérateur et au dénominateur. Reste à déterminer, pour chacune, son terme de plus haut degré.

P est un polynôme de degré $n \geq 2$. En notant $a_n x^n$ le terme de plus haut degré dans l'expression de $P(x)$ (avec $a_n \neq 0$), et en dérivant terme à terme, on obtient le terme de plus haut degré dans l'expression de $P'(x)$: c'est $na_n x^{n-1}$ (on a bien $na_n \neq 0$)
Le terme de plus haut degré dans l'expression de $xP'(x)$ est donc $na_n x^n$ (tout simplement celui de $P'(x)$ multiplié par x). Il est de degré n.

Le terme de plus haut degré de $xP'(x)-P(x)$ est donc au plus de degré n : ce degré ne peut pas dépasser n, mais il pourrait en général se retrouver inférieur à n si les termes en x^n de $xP'(x)$ et de $-P(x)$ se simplifient. Toutefois, ici, le terme en x^n de $xP'(x)-P(x)$ est $na_nx^n - a_nx^n$, c'est-à-dire $(n-1)a_nx^n$.

Comme $n \geq 2$, $n-1 \geq 1$ et donc $n-1 \neq 0$. De plus, $a_n \neq 0$. D'où : $(n-1)a_n \neq 0$, ce qui nous permet de conclure que le terme de plus haut degré de $xP'(x)-P(x)$ est bien $(n-1)a_nx^x$

Pour récapituler : dans l'expression $N_P(x) = \frac{xP'(x)-P(x)}{P'(x)}$, le terme de plus haut degré du numérateur est $(n-1)a_nx^n$, et le terme de plus haut degré du dénominateur est na_nx^{n-1}
Nous pouvons en conclure, d'après le résultat donné par l'énoncé :

$$\lim_{x\to+\infty} N_P(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(n-1)a_nx^n}{na_nx^{n-1}}$$

Or : $\forall x > 0$, $\dfrac{(n-1)a_nx^n}{na_nx^{n-1}} = \dfrac{n-1}{n} \times x$. Donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(n-1)a_nx^n}{na_nx^{n-1}} = +\infty$

C'est bien x que nous faisons tendre vers $+\infty$ et pas n, ne vous faites pas avoir.

Finalement : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} N_P(x) = +\infty}$

Pour tout $x \in \Omega$, $N'_P(x) = \dfrac{P(x)P''(x)}{(P')^2(x)}$

Le terme de plus haut degré dans l'expression de $P(x)$ est a_nx^n, celui de plus haut degré dans l'expression de $P'(x)$ est na_nx^{n-1} et enfin (en redérivant) celui de plus haut degré dans l'expression de $P''(x)$ est $n(n-1)a_nx^{n-2}$ (rappelons $n \geq 2$)
Nous pouvons en déduire, par produit, que le terme de plus haut degré dans l'expression de $P(x)P''(x)$ est $a_nx^n \times n(n-1)a_nx^{n-2}$, c'est-à-dire $n(n-1)a_n^2x^{2n-2}$.

De même, le terme de plus haut degré dans l'expression de $(P')^2(x)$ est $(na_nx^{n-1})^2$, c'est-à-dire $n^2a_n^2x^{2n-2}$.
Par suite : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} N'_P(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)a_n^2x^{2n-2}}{n^2a_n^2x^{2n-2}}$. Enfin : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} N'_P(x) = \frac{n(n-1)}{n^2} = \frac{n-1}{n}}$

Attention, encore une fois : c'est bien x que nous faisons tendre vers $+\infty$, et pas n. Dans notre cas, n est une constante. Hors de question donc, de dire que la limite du dernier *quotient obtenu serait* 1 *(ce qui aurait été le cas pour* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n}$*)*

Remarque générale : j'ai bien conscience qu'au sortir de la Terminale, on a très rarement les outils théoriques pour manipuler les polynômes, leurs degrés, leurs termes de plus haut degré avec rigueur (même si l'on a déjà été confronté, de manière plus ou moins directe, à ces notions). Plutôt que de vous faire subir un point de cours parfaitement exhaustif sur la question - vous aurez bien assez de l'an prochain pour ça - j'ai préféré vous laisser manipuler ces notions de manière quelque peu intuitive, avec, en renfort, les remarques sur l'énoncé avant la correction, censées vous fournir les billes suffisantes pour vous permettre d'avancer.

Pour aller plus loin sur la manipulation de polynômes et de leurs degrés, cet exercice (lien) pourra vous intéresser.

Exercice 3

Crochets somme exposants jouant tous sur nos nerfs :
un développement que l'on dirait ternaire.

Énoncé : (temps conseillé : 40 min) (***) *d'après CCINP 2020 MP Maths 1*

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes lorsque les conditions suivantes sont réunies : l'une est croissante, l'autre décroissante, et $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.
Le résultat suivant (utilisable mais pas forcément nécessaire pour cet exercice) est admis : si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles convergent, et ont la même limite. *Cette vidéo vous le fait démontrer en exercice.*

Pour tout réel y, on note $\lfloor y \rfloor$ la partie entière de y.

On fixe un réel x. Soit t la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ t_n = \lfloor 3^n x \rfloor - 3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor$

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ t_n \in \{0;1;2\}$

2) Soient (x_n) et (y_n) les deux suites réelles définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \dfrac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n}$ et $y_n = x_n + \dfrac{1}{3^n}$. Démontrer que (x_n) et (y_n) sont adjacentes, puis que leur limite est x.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{t_k}{3^k}$. Déterminer : $\lim_{n\to+\infty} S_n$

Remarques sur l'énoncé :

Rappelons au cas où que $\mathbb{N}^*$ est tout simplement l'ensemble des entiers naturels non nuls, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels plus grands ou égaux à 1. (De même que $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels non nuls)

Rappelons ensuite que pour tout réel y, $\lfloor y \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à y. C'est l'unique entier relatif vérifiant : $\lfloor y \rfloor \le y < \lfloor y \rfloor + 1$. De manière équivalente, c'est aussi l'unique entier relatif vérifiant : $y - 1 < \lfloor y \rfloor \le y$

Rappelons ensuite que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} a_k$ se lit « somme pour k allant de 1 à n des a_k », et désigne donc tout simplement $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

La suite (S_n) introduite en question 3 est donc définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \dfrac{t_1}{3^1} + \dfrac{t_2}{3^2} + ... + \dfrac{t_n}{3^n}$

À toutes fins utiles, entre autres propriétés intuitives des sommes : lorsque C est une constante (indépendante de k), on a : $\sum_{k=1}^{n} Ca_k = C \sum_{k=1}^{n} a_k$ (linéarité)
C'est une simple factorisation : trivialement, $Ca_1 + Ca_2 + ... + Ca_n = C(a_1 + a_2 + ... + a_n)$

Voici un lien vers une playlist de vidéos courtes. pour vous familiariser avec le signe $\sum$ si vous ne l'avez pas ou pas suffisamment manipulé en Terminale.

Correction de l'exercice 3 :

1) *Bon... Que faire mis à part jouer des encadrements qui définissent la partie entière ?*

Pour tout entier naturel non nul n, $t_n = \lfloor 3^n x \rfloor - 3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor$.
Par définition de la partie entière : $3^n x - 1 < \lfloor 3^n x \rfloor \leq 3^n x$ et $3^{n-1}x - 1 < \lfloor 3^{n-1}x \rfloor \leq 3^{n-1}x$
D'où (en multipliant par $-3 < 0$) : $-3(3^{n-1}x - 1) > -3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor \geq -3 \times 3^{n-1}x$
Autrement dit : $-3^n x + 3 > -3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor \geq -3^n x$ ou encore : $-3^n x \leq -3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor < -3^n x + 3$

Nous avons donc les deux encadrements suivants : *(à additionner terme à terme)*
$3^n x - 1 < \lfloor 3^n x \rfloor \leq 3^n x$ et $-3^n x \leq -3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor < -3^n x + 3$
En les additionnant, nous obtenons : $3^n x - 1 - 3^n x < \lfloor 3^n x \rfloor - 3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor < 3^n x - 3^n x + 3$

Remarque : si $a < b$ et $c \leq d$, on peut en déduire $a + c < b + d$. C'est bien une inégalité au sens strict, $a + c$ n'est pas égal à $b + d$ à cause de l'inégalité stricte entre a et b. Ecrire $a + c \leq b + d$ ne serait pas faux, mais c'est une perte d'information.
Par ailleurs, il est évidemment hors de question de soustraire terme à terme deux inégalités (ou deux encadrements) de la sorte : $\big[(a < b$ et $c < d\big]$ n'entraîne certainement pas $a - c < b - d$ (que les inégalités soient strictes ou larges). Par contre, dire $\big[a < b$ et $c < d\big]$ est équivalent à dire, en multipliant la seconde inégalité par -1 et donc en changeant son sens : $\big[a < b$ et $-d < -c\big]$. On peut ensuite additionner les deux inégalités obtenues, ce qui entraîne : $a - d < b - c$

Nous avons donc obtenu : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ -1 < t_n < 3$

Nous sommes tout près de pouvoir conclure, mais comment passer de $t_n \in]-1; \ 3 \ [$ à $t_n \in \{0;1;2\}$? En nous penchant sur la nature de ce t_n...

Pour tout entier naturel non nul n, $\lfloor 3^n x \rfloor$ et $\lfloor 3^{n-1}x \rfloor$ sont des entiers (relatifs). Par produit et somme d'entiers, $\lfloor 3^n x \rfloor - 3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor$ est aussi un entier. Autrement dit, t_n est un entier.
Les entiers strictement compris entre -1 et 3 sont 0, 1 et 2.
Nous pouvons donc conclure : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ t_n \in \{0;1;2\}}$

2) *On ne sait pas encore laquelle des deux suites est croissante et laquelle est décrois-*

sante. Mais pas de panique, étudions simplement leurs variations.

Pour tout entier naturel non nul n : $x_{n+1} - x_n = \dfrac{\lfloor 3^{n+1}x \rfloor}{3^{n+1}} - \dfrac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n}$

Que faire avec cette expression à l'apparence horrible ? Mettre les deux fractions sous le même dénominateur, et 3^{n+1} convient à merveille.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} - x_n = \dfrac{\lfloor 3^{n+1}x \rfloor}{3^{n+1}} - \dfrac{3 \times \lfloor 3^n x \rfloor}{3 \times 3^n} = \dfrac{\lfloor 3^{n+1}x \rfloor - 3 \times \lfloor 3^n x \rfloor}{3^{n+1}}$ *Oh, ce numérateur...*

Remarquons : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} - x_n = \dfrac{t_{n+1}}{3^{n+1}}$ *Et on veut connaître le signe de cette quantité*

D'après 1) : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n \geq 0$. C'est donc aussi valable pour t_{n+1}. Et $3^{n+1} > 0$.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} - x_n \geq 0$. $\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est donc croissante.}}$

Pour tout entier naturel non nul n : $y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + \dfrac{1}{3^{n+1}} - (x_n + \dfrac{1}{3^n}) = x_{n+1} - x_n + \dfrac{1}{3^{n+1}} - \dfrac{1}{3^n}$

Autant nous servir de la sympathique expression de $x_{n+1} - x_n$ obtenue plus haut...

Il s'ensuit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_{n+1} - y_n = \dfrac{t_{n+1}}{3^{n+1}} + \dfrac{1}{3^{n+1}} - \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{t_{n+1} + 1 - 3}{3^{n+1}} = \dfrac{t_{n+1} - 2}{3^{n+1}}$

Or, d'après 1) : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ t_n \leq 2$. C'est donc aussi valable pour t_{n+1}. D'où : $t_{n+1} - 2 \leq 0$
Enfin : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_{n+1} - y_n \geq 0$. $\boxed{\text{La suite } (y_n) \text{ est donc décroissante.}}$

Reste à montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n - x_n = 0$ (*ou* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n - y_n = 0$, *ce qui revient au même*)
Pour tout entier naturel non nul n, $y_n - x_n = \dfrac{1}{3^n} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. Or : $\dfrac{1}{3} \in \,]-1;1[$.

Nous pouvons donc en déduire : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} y_n - x_n = 0}$

En conclusion, $\boxed{\text{les suites } (x_n) \text{ et } (y_n) \text{ sont adjacentes.}}$

À ce stade, le résultat admis nous dit qu'elles convergent vers la même limite, mais pas qui est cette limite...
Pour tout entier naturel non nul n, $x_n = \dfrac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n}$, et on sait : $3^n x - 1 < \lfloor 3^n x \rfloor \leq 3^n x$
Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{3^n x - 1}{3^n} < x_n \leq \dfrac{3^n x}{3^n}$. Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x - \dfrac{1}{3^n} < x_n \leq x$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} x-\dfrac{1}{3^n}=x$ *(et, si vous voulez :* $\lim\limits_{n\to+\infty} x=x$)

Le théorème des gendarmes nous permet de conclure : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x}$

Les suites (x_n) et (y_n) étant adjacentes, nous en déduisons aussi : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=x}$

Histoire de nous servir du résultat sur les suites adjacentes rappelé par l'énoncé, même si nous pouvions clairement nous débrouiller sans lui, en utilisant simplement la limite connue - en l'occurrence x - de (x_n)*, et le fait que pour tout entier naturel non nul n,* $y_n=x_n+\dfrac{1}{3^n}$*. D'où, par somme de limites...*

3) *Comment calculer la limite lorsque n tend vers* $+\infty$ *d'une telle somme ? Cela semble difficile en l'état. Intéressons-nous donc, pour commencer, à son terme général - le terme « à l'intérieur » - histoire de le transformer si possible...*

Pour tout entier naturel non nul k, $\dfrac{t_k}{3^k}=\dfrac{\lfloor 3^k x\rfloor-3\lfloor 3^{k-1}x\rfloor}{3^k}=\dfrac{\lfloor 3^k x\rfloor}{3^k}-\dfrac{3\lfloor 3^{k-1}x\rfloor}{3^k}$

D'où : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{t_k}{3^k}=\dfrac{\lfloor 3^k x\rfloor}{3^k}-\dfrac{\lfloor 3^{k-1}x\rfloor}{3^{k-1}}$

Plutôt pas mal comme forme, non ? Et si l'on sommait ces termes-là ?

Donc, pour tout entier naturel non nul n, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{t_k}{3^k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\lfloor 3^k x\rfloor}{3^k}-\frac{\lfloor 3^{k-1}x\rfloor}{3^{k-1}}\right)$

Oui, et alors ? Et alors, l'an prochain, vous reconnaîtrez asssez vite ce que l'on appelle un télescopage : ici, une simplification de termes par addition / soustraction. Explicitons cette somme pour y voir plus clair :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n=\dfrac{\lfloor 3^1x\rfloor}{3^1}-\dfrac{\lfloor 3^{1-1}x\rfloor}{3^{1-1}}+\dfrac{\lfloor 3^2x\rfloor}{3^2}-\dfrac{\lfloor 3^{2-1}x\rfloor}{3^{2-1}}+\dfrac{\lfloor 3^3x\rfloor}{3^3}-\dfrac{\lfloor 3^{3-1}x\rfloor}{3^{3-1}}+\ldots+\dfrac{\lfloor 3^nx\rfloor}{3^n}-\dfrac{\lfloor 3^{n-1}x\rfloor}{3^{n-1}}$

$=\dfrac{\lfloor 3x\rfloor}{3}-\lfloor x\rfloor+\dfrac{\lfloor 3^2x\rfloor}{3^2}-\dfrac{\lfloor 3x\rfloor}{3}+\dfrac{\lfloor 3^3x\rfloor}{3^3}-\dfrac{\lfloor 3^2x\rfloor}{3^2}+\ldots+\dfrac{\lfloor 3^nx\rfloor}{3^n}-\dfrac{\lfloor 3^{n-1}x\rfloor}{3^{n-1}}$

Remarquons que tous les termes se simplifient deux à deux sauf $-\lfloor x\rfloor$ et $\dfrac{\lfloor 3^nx\rfloor}{3^n}$

Une simplification peu formelle, à laquelle le programme de Terminale nous cantonne. En toute rigueur, l'expression explicite que je donne de la somme (avec assez de termes pour

que vous voyiez bien la simplification) n'est valable que pour $n > 2$. Mais l'expression de S_n qui suit est bien valable pour tout entier naturel n non nul. Et, si vous voulez vous en convaincre, n'hésitez pas à la vérifier pour $n = 1$ et 2.
Une utilisation du principe de télescopage nous aurait permis d'écrire directement :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\lfloor 3^k x \rfloor}{3^k} - \frac{\lfloor 3^{k-1} x \rfloor}{3^{k-1}}\right) = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} - \frac{\lfloor 3^{1-1} x \rfloor}{3^{1-1}} = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} - \lfloor x \rfloor$$

Pour des explications détaillées sur le télescopage, n'hésitez pas à consulter cette vidéo-ci de la playlist conseillée avant la correction.

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \dfrac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} - \lfloor x \rfloor$. Autrement dit : $S_n = x_n - \lfloor x \rfloor$.

D'après 2) : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ *Et $\lfloor x \rfloor$ est tout simplement une constante.*

Enfin, par somme de limites : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = x - \lfloor x \rfloor}$

La quantité $x - \lfloor x \rfloor$ est ce que l'on appelle la partie fractionnaire de x. Par exemple, pour $x = 3,156$, c'est $0,156$. Pour $x = 12$, c'est 0.
Mais pour $x = -5,47$, ce n'est pas $-0,47$, car $\lfloor -5,47 \rfloor$ n'est pas égal à -5 mais à -6. La partie fractionnaire de $-5,47$ est donc $-5,47 - (-6) = 6 - 5,47 = 0,53$

Dans l'énoncé originel, le réel x était pris dans $[0;1[$. Dans ce cas, sa partie entière $\lfloor x \rfloor$, et sa partie fractionnaire est donc lui-même. D'où, toujours dans ce cas : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = x$

Exercice 4

Intégrale en avant ! La somme nous escorte
au résultat suivant : la factorielle est forte.

Énoncé : (temps conseillé : 50 min) (**) *d'après Mines-Ponts 2018 MP Maths 1*

1) Calculer, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$

2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t \leq \ln(k+1)$

3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n\ln(n) - n + 1 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$

4) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \leq n!$

Remarques sur l'énoncé :

Concernant la manipulation du signe somme : au rappel effectué dans les remarques sur l'énoncé de l'exercice 3, ajoutons cette précision sur les changements d'indice, qui pourra vous être utile : pour $n \geq 2$, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}$ est égale à la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$.

En effet : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} = u_{1+1} + u_{2+1} + \ldots + u_{n-1+1} = u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$

De manière plus formelle, en partant de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}$, on pose le changement d'indice $j = k+1$. Puisque k allait de 1 jusqu'à $n-1$, j va de 2 jusqu'à n. Et u_{k+1} est remplacé par u_j. On se retrouve donc avec $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_{j+1}$, qui n'est autre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}$.
Les variables k et j dans ces deux dernières sommes sont en effet « muettes ». Elles ne sont là que pour indiquer le parcours de l'indice de sommation. De la même manière que $\displaystyle\int_1^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \ln(u)\,\mathrm{d}u$.

Mais alors pourquoi nous être embêté à poser ce fameux j ? Pour ne pas nous emmêler les pinceaux entre l'ancien et le nouvel indice de sommation.

Pour plus de précisions sur les changements d'indice, n'hésitez pas à consulter cette vidéo. Oui, oui, encore une vidéo de la playlist dont je vous parle sans arrêt, mais elle est bien, vous verrez.

Correction de l'exercice 4 :

1) *Si vous faites partie des chanceux qui connaissent déjà une primitive de* ln *sur* $\mathbb{R}_*^+$ *à ce stade de leur scolarité, vous pouvez bien entendu vous en servir pour plier la question. Sinon, il va falloir ruser un peu. Que faire à cette intégrale, quelle technique employer si l'on ne sait pas la calculer directement ? Peut-être une intégration par parties (IPP) ? Mais on ne voit pas de produit dans l'intégrale ! Oh, avec un peu d'imagination...*

Pour tout réel $x > 0$, $\displaystyle\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \ln(t) \times 1\,\mathrm{d}t$

Nous allons dériver ln *et primitiver la fonction constante* $t \mapsto 1$ *(et pas le contraire, car si nous savions primitiver ln, nous aurions calculé l'intégrale directement sans IPP)*

Soient u et v définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = t$. u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et leurs dérivées u' et v' définies par $u'(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = 1$, sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, cela reste valable sur le segment $[1;\ x]$ (lorsque $x \geq 1$) ou $[x;\ 1]$ (lorsque $x < 1$)

Pour pouvoir faire une IPP sur ce segment... L'an prochain, pour dire « f est dérivable sur I et f' est continue sur I », vous direz simplement : « f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I »

Pour tout réel $x > 0$, $\displaystyle\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \ln(t) \times 1\,\mathrm{d}t = \int_1^x u(t) \times v'(t)\,\mathrm{d}t$

Une intégration par parties fournit : $\displaystyle\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_1^x - \int_1^x u'(t) \times v(t)\,\mathrm{d}t$

$\displaystyle = \Big[t\ln(t)\Big]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t\,\mathrm{d}t = x\ln(x) - 1\ln(1) - \int_1^x 1\,\mathrm{d}t = x\ln(x) - 0 - (x-1)$

Pour la valeur de $\displaystyle\int_1^x 1\,dt$, *on peut utiliser simplement le fait que pour toute constante K (ici* $K = 1$*),* $\displaystyle\int_a^b K\,dt = K(b-a)$*. Le savoir permet de gagner du temps, mais au pire, vous primitivez* $t \mapsto K$*, vous obtenez* $t \mapsto Kt$*, et vous vous retrouvez avec* $\big[Kt\big]_a^b = Kb - Ka = K(b-a)$

Enfin : $\boxed{\text{pour tout réel } x > 0,\ \displaystyle\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = x\ln(x) - x + 1}$

Ceux qui connaissaient une primitive de ln *reconnaîtront à une constante près la primitive en question, à savoir (probablement)* $F : x \mapsto x\ln(x) - x$

2) *A priori, on ne voit pas trop comment le résultat de la question précédente pourrait nous aider à montrer que pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} \ln(t)\, dt \leq \ln(k+1)$. *Peut-être faut-il partir sur autre chose. Il faut comparer l'intégrale* $\int_k^{k+1} \ln(t)\, dt$ *à la quantité* $\ln(k+1)$. *Dans ce genre de situation, il s'agit souvent de comparer la fonction sous l'intégrale à une autre fonction (parfois constante) que l'on sait intégrer, puis passer à l'intégrale dans l'inégalité... Ici, par quoi majorer le* $\ln(t)$ *dans l'intégrale ? N'oubliez pas les bornes. Autrement dit, n'oubliez pas dans quel ensemble se balade votre variable d'intégration (ici* t*).*

La croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$ entraîne : $\forall t \in [k;\ k+1],\ \ln(t) \leq \ln(k+1)$

Donc, par croissance de l'intégrale : $\displaystyle\int_k^{k+1} \ln(t)\, \mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \ln(k+1)\, \mathrm{d}t$

Cette croissance de l'intégrale est permise car les bornes sont dans le bon sens ($k < k+1$). *Dans le second membre, on intègre une constante....*

D'où : $\displaystyle\int_k^{k+1} \ln(t)\, \mathrm{d}t \leq (k+1-k)\ln(k+1)$, et enfin : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_k^{k+1} \ln(t)\, \mathrm{d}t \leq \ln(k+1)}$

Attention. Une fois parvenus à « $\forall t \in [k;\ k+1],\ \ln(t) \leq \ln(k+1)$ », et en voyant le $\ln(k+1)$ *auquel on veut aboutir, certains n'intègrent que le membre de gauche de l'inégalité, ce qui n'a pas de sens. Coup de chance, ils se retrouvent avec le bon résultat ici, parce que* $\ln(k+1)$ *est une constante et que l'intervalle d'intégration* $[k;\ k+1]$ *est de longueur* 1. *Mais si le correcteur comprend leur oubli d'intégration d'un des deux membres...*

3) *« En déduire... » Que faire de l'inégalité précédente pour obtenir cette nouvelle inégalité ? Une somme semble devoir apparaître. Si* (a_k) *et* (b_k) *sont deux suites telles que pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k \leq b_k$, *on obtient, en sommant :*
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. *Autrement dit :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k$

D'après 2) : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_k^{k+1} \ln(t)\, \mathrm{d}t \leq \ln(k+1)$. En sommant ces inégalités, on obtient, pour tout $n \geq 2$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln(t)\, \mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1)$

Pourquoi sommer jusqu'à $n-1$ *et pas* n *? Peut-être pour saisir la perche tendue dans les remarques sur l'énoncé, qui nous fait passer, par changement d'indice, de* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}$ *à*

$\sum_{k=2}^{n} u_k$*, pour que le* $\ln(k+1)$ *devienne du* $\ln(k)$ *sommé jusqu'à n... Et c'est le fait d'écrire* $\sum_{k=1}^{n-1}$ *qui nous a imposé de prendre* $n \geq 2$ *: on somme pour k allant de* 1 *jusqu'à* $n-1$*, on a donc intérêt à ce que* $1 \leq n-1$ *(même s'il existe une convention pour les sommes du style* $\sum_{k=1}^{0} u_k$*, qui nous dit qu'elles sont égales à zéro)*

D'accord, on a pris $n \geq 2$ *mais il ne faudra pas oublier de traiter le cas* $n = 1$ *à part (l'énoncé nous demande un résultat pour* $n \geq 1$*)*

Fort bien, mais que faire de l'horreur $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln(t)\, dt$ *? Commencer par arrêter de la traiter d'horreur, elle n'est pas si laide que ça...*

Pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t + \int_2^3 \ln(t)\,\mathrm{d}t + \ldots + \int_{n-1}^{n-1+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t$

Que faire de tout ce beau monde ? Chasles, bien sûr... Plusieurs fois, certes, mais ça reste Chasles.

D'après la relation de Chasles : $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$

Oh, mais - merci la question 1) - je connais la valeur de cette intégrale !

Donc, d'après 1) : $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t = n\ln(n) - n + 1$

L'inégalité $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1)$ obtenue précédemment s'écrit donc :

$n\ln(n) - n + 1 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1)$ *Le membre de gauche nous va très bien !*

De plus, par changement d'indice (cf remarques sur l'énoncé) : $\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$

Et $\ln(1) = 0$, donc $\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \ln(1) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$. D'où : $\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$

Nous avons donc montré : $\forall n \geq 2,\ n\ln(n) - n + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$

Bon ben c'est fini, non ? Presque. Reste à traiter le cas $n = 1$*.*

Pour $n = 1$: d'une part, $1\ln(1) - 1 + 1 = 0$, et d'autre part, $\sum_{k=1}^{1} \ln(k) = \ln(1) = 0$. Donc l'inégalité large précédente reste vraie.

Nous pouvons enfin conclure que : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ n\ln(n) - n + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k)}$

4) *Hein ? Que viennent faire les factorielles là-dedans ? Et cette puissance n ? Du calme, $n!$ n'est rien d'autre que le produit des entiers de 1 jusqu'à n. En quoi est-ce une bonne nouvelle ? Ben, cette somme de logarithmes... Une propriété de* ln...

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \ln(1) + \ln(2) + ... + \ln(n) = \ln(1 \times 2 \times ... \times n) = \ln(n!)$

Le voilà, votre $n!$ ... Mais prisonnier d'un ln.

D'après 3), nous avons donc : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n\ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!)$
Puis, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$: $\exp\left(n\ln(n) - n + 1\right) \leq n!$

Ce serait sympa si le membre de gauche était égal à $\left(\frac{n}{e}\right)^n$...

D'autre part : $\exp\left(n\ln(n) - n + 1\right) = \exp\left(n\ln(n)\right) \times \exp\left(-n\right) \times \exp\left(1\right)$
$= \exp\left(\ln(n^n)\right) \times e^{-n} \times e = n^n \times e^{-n} \times e = \frac{n^n}{e^n} \times e = \left(\frac{n}{e}\right)^n \times e$

Ah, ce n'est pas tout à fait $\left(\frac{n}{e}\right)^n$. *Mais* $\left(\frac{n}{e}\right)^n \times e$ *est supérieur à* $\left(\frac{n}{e}\right)^n$, *et cela suffit ! Voyez plutôt :*

$e > 1$ et $\left(\frac{n}{e}\right)^n > 0$. Donc $e \times \left(\frac{n}{e}\right)^n > \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Autrement dit : $\exp\left(n\ln(n) - n + 1\right) > \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Nous avons donc montré : $\left(\frac{n}{e}\right)^n < \exp\left(n\ln(n) - n + 1\right) \leq n!$

Enfin, $\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n : \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!}$

C'est même plus précisément une inégalité stricte du fait de l'inégalité stricte entre $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ *et* $\exp\left(n\ln(n) - n + 1\right)$. *Mais la véracité de l'inégalité stricte entraîne bien la véracité de l'inégalité large. Il est tout à fait correct d'écrire $2 \leq 7$, même si, d'expérience, ça en choque encore pas mal d'entre vous au sortir de la Terminale.*

Exercice 5

Donnez jeune bavard et sans les écorner
les valeurs de départ qui la rendent bornée.

Énoncé : (temps conseillé : 45 min) (***) *d'après ENS Maths D 2017 MP*

On admet le résultat suivant : toute suite réelle convergente est bornée.

Soit $c \in \mathbb{R}$. Soit f_c la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_c(x) = x^2 + c$.
On note (x_n) la suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et par : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f_c(x_n)$
Enfin, pour tout $c \in \mathbb{R}$, on note K_c l'ensemble suivant : $K_c = \{x_0 \in \mathbb{R},\ (x_n) \text{ est bornée}\}$

1) Dans cette question, on suppose $c = 0$. Exprimer x_n en fonction de n et de x_0. Déterminer la limite de la suite (x_n) en fonction de x_0, puis déterminer l'ensemble K_0

2) Déterminer l'ensemble des points fixes de f_c en fonction de c.

3) Dans cette question, on suppose $c > \dfrac{1}{4}$. Montrer que pour toute valeur de $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite (x_n) est croissante. En déduire l'ensemble K_c.

Remarques sur l'énoncé :

L'ensemble K_c est tout simplement l'ensemble des réels x_0 tels que la suite (x_n) définie plus haut (de terme initial x_0, justement) est bornée. Mais pourquoi l'indice c dans le nom K_c ? Parce que cet ensemble dépend de la valeur de c, qui intervient dans la relation de récurrence ($x_{n+1} = x_n^2 + c$)

La question 2) parle de « points fixes » . Les points fixes de la fonction f_c sont les réels x tels que $f_c(x) = x$. La question 2) nous demande donc de déterminer, en fonction de c, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f_c(x) = x$ (d'inconnue x)

Correction de l'exercice 5 :

1) En prenant $c = 0$, la suite (x_n) vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f_0(x_n)$ avec $f_0 : x \mapsto x^2$.
Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n^2$.

Comment sommes-nous censés déterminer l'expression générale de x_n à partir d'une telle relation de récurrence, qui ne définit ni une suite arithmétique, ni une suite géométrique ? Donnons-nous donc une idée à l'aide des premiers termes :

En particulier : $x_1 = x_0^2,\ \ x_2 = x_1^2 = (x_0^2)^2 = x_0^4,\ \ x_3 = x_2^2 = (x_0^4)^2 = x_0^8,\ \ x_4 = x_3^2 = (x_0^8)^2 = x_0^{16}$
Ca devrait être assez pour vous donner l'idée d'une bonne conjecture (qu'il faudra ensuite démontrer, bien sûr). Regardez, pour chaque rang, la puissance à laquelle x_0 est élevé.

Il semblerait que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = (x_0)^{2^n}$. Montrons-le par récurrence sur n :
Initialisation pour $n = 0$: $(x_0)^{2^0} = x_0^1 = x_0$, donc la propriété est vraie au rang 0.
Hérédité : Supposons que pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (x_0)^{2^n}$.
On a alors : $x_{n+1} = x_n^2 = \left((x_0)^{2^n}\right)^2 = \left(x_0\right)^{2^n \times 2}$. Donc : $x_{n+1} = (x_0)^{2^{n+1}}$ et la propriété est vérifiée au rang $n+1$
Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure que $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ x_n = (x_0)^{2^n}}$

Maintenant que nous avons l'expression de son terme général, comment obtenir la limite de cette suite (x_n) ? L'expression de (x_n) nous fait penser à celle d'une suite géométrique, même si, attention, elle ne l'est pas.

Si $x_0 \in]-1; 1[$: $\lim\limits_{N \to +\infty} x_0^N = 0$. Et : $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ (car $2 > 1$).
Donc, par composée de limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_0)^{2^n} = 0$. Autrement dit : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0}$

En Terminale, vous avez a priori été plus habitués à des compositions de limites dans le cadre de fonctions. Le principe ici est tout à fait le même (et d'ailleurs, une suite n'est rien d'autre qu'une fonction définie sur $\mathbb{N}$, ou $\mathbb{N}^*$, ou plus généralement l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à un certain entier).
Attention, toutefois, à ne pas dégainer une composition de limites dans des situations où elle ne s'y prête pas. Pas mal de bêtises sont dites par exemple lorsqu'il s'agit de calculer la limite en $+\infty$ de $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Vous trouverez le calcul de cette limite en vidéo ici.

Revenons maintenant à notre exercice. Si $x_0 = 1$, le résultat est facile. Mais que dire pour $x_0 = -1$? Remarquez que pour tout $n \geq 1$, 2^n (la puissance à laquelle on élève x_0...) est pair.

Si $x_0 \in \{-1;1\}$ (*autrement dit, si $x = 1$ ou -1*) :
$\forall n \geq 1,\ x_n = (x_0)^{2^n} = (x_0)^{2\times 2^{n-1}} = (x_0^2)^{2^{n-1}} = 1^{2^{n-1}} = 1$. D'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1}$
Faire apparaître x_0^2 était utile ici, vu qu'il vaut 1 dans ces deux cas.

Si $|x_0| > 1$ (*autrement dit, si $x > 1$ ou $x < -1$*) : $\forall n \geq 1,\ x_n = (x_0)^{2^n} = (x_0)^{2\times 2^{n-1}} = (x_0^2)^{2^{n-1}}$.
Or, $x_0^2 > 1$. Donc : $\lim\limits_{N\to+\infty} (x_0^2)^N = +\infty$.
Et : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n-1} = +\infty$. Donc, par composée de limites : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty}$

Sommes-nous maintenant en mesure de déterminer l'ensemble K_0 ? À savoir l'ensemble des valeurs (toujours dans le cas $c = 0$) de x_0 pour lesquelles la suite (x_n) est bornée ?

D'après ce qui précède, si $x_0 \in [-1;\ 1]$, la suite (x_n) converge. Donc, d'après le résultat admis par l'énoncé, (x_n) est bornée.
Et si $x_0 > 1$ ou $x_0 < -1$, la suite (x_n) diverge vers $+\infty$. Elle ne peut donc pas être bornée dans ce cas, puisqu'elle n'est même pas majorée.
Rappelons qu'une suite bornée est une suite à la fois majorée et minorée.
En conclusion, (x_n) est bornée si et seulement si $x_0 \in [-1;\ 1]$. Autrement dit : $\boxed{K_0 = [-1;\ 1]}$

2) Soit $c \in \mathbb{R}$. Résolvons l'équation $f_c(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Pour tout réel x : $f_c(x) = x \iff x^2 + c = x \iff x^2 - x + c = 0$
Il s''agit d'une équation du second degré, dont le discriminant est le suivant :
$\Delta_c = (-1)^2 - 4\times 1\times c = 1 - 4c$ *Je l'ai appelé Δ_c pour me rappeler qu'il dépend de c*
Le nombre de solutions de cette équation (et donc le nombre de points fixes de f_c) dépend du signe de Δ_c, et : $\Delta_c > 0 \iff 1 - 4c > 0 \iff 4c < 1 \iff c < \dfrac{1}{4}$

- Si $c < \dfrac{1}{4}$, f_c admet deux points fixes : $\dfrac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$
- Si $c = \dfrac{1}{4}$, f_c admet un unique point fixe : $\dfrac{1}{2}$
- Si $c > \dfrac{1}{4}$, f_c n'admet aucun point fixe.

3) Pour tout entier naturel n : $x_{n+1} - x_n = x_n^2 + c - x_n = x_n^2 - x_n + c$

On se retrouve avec la même fonction polynomiale intervenue à la question précédente, cette fois-ci appliquée à x_n...
Soit P_c la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $P_c(x) = x^2 - x + c$.

Ici, $c > \dfrac{1}{4}$. Donc le discriminant Δ_c (le même qu'en question 2) est strictement négatif, et la fonction P_c est de signe constant sur $\mathbb{R}$ (sans s'annuler). Plus précisément, elle est du signe du coefficient dominant 1. *Le a, si vous voulez...* Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ P_c(x) > 0$

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_c(x_n) > 0$. Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n^2 - x_n + c > 0$
Nous avons donc montré : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - x_n > 0$.
$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est bien (strictement) croissante}}$ (quelle que soit la valeur de x_0)

D'accord, mais quel rapport avec l'ensemble K_c ? Autrement dit, avec l'ensemble des valeurs de c pour lesquelles (x_n) est bornée ? La croissance de (x_n) réduit ses possibilités en termes de limite...
(x_n) est une suite croissante, donc soit elle est convergente, soit elle diverge vers $+\infty$.

Rappelons que (x_n) est définie par son premier terme x_0 et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f_c(x_n)$. Donc **si elle converge**, elle converge vers un réel l vérifiant $f_c(l) = l$ (*d'après un résultat vu en Terminale, sous l'appellation « théorème du point fixe » pour certains*)
Autrement dit, si (x_n) converge, elle converge vers un point fixe de f_c.

Mais, d'après 2), dans notre cas $\left(c > \dfrac{1}{4}\right)$, f_c n'admet aucun point fixe ! (x_n) ne peut donc pas converger.
En conclusion : pour $c > \dfrac{1}{4}$, quelle que soit la valeur de x_0, (x_n) diverge vers $+\infty$. Elle n'est donc pas majorée, et donc pas bornée.

Pour $c > \dfrac{1}{4}$, il n'y a aucune valeur de x_0 pour laquelle (x_n) serait bornée.

En conclusion : $\boxed{K_c = \emptyset}$ (*l'ensemble vide*)

Le principe de s'intéresser à certains caractères (borné ou pas, convergence ou pas) d'une suite en fonction de la valeur de son premier terme me fait penser à cet exercice-ci, que vous pourrez trouver utile.

Exercice 6

Un nombre rationnel et de Liouville aussi ?
Le jour où les lanternes deviendront vessies.

Énoncé : (temps conseillé : 35 min) (****) *d'après ENS Maths C 2017 MP*

On dit qu'un nombre réel α est de Liouville si pour tout entier $n \geq 1$, il existe un couple $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \left(\mathbb{N} \backslash \{0;1\}\right)$ tel que : $0 < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left(\frac{1}{q_n}\right)^n$

1) Justifier que pour tout réel positif M, il existe un entier naturel n_0 tel que : $\forall n \geq n_0,\ 2^n \geq M$

2) Montrer que tout nombre de Liouville est irrationnel.

Remarques sur l'énoncé :

Profitons-en pour rappeler (ou faire découvrir) le sens de la notation $E \times F$, lorsque E et F sont deux ensembles. $E \times F$, appelé produit cartésien de E et F, est l'ensemble des couples (a, b) avec $a \in E$ et $b \in F$.
« $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \left(\mathbb{N} \backslash \{0;1\}\right)$ » veut donc dire la même chose que « $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N} \backslash \{0;1\}$ »
(Autrement dit, p_n est un entier relatif et q_n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.)

Cas particulier : si E est un ensemble, E^2 est l'ensemble des couples (a, b) avec $a \in E$ et $b \in E$. On note aussi $E^2 = E \times E$.

On rappelle qu'un nombre réel x est rationnel s'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{p}{q}$
Un quotient d'entiers, en fait, dont le dénominateur est évidemment non nul ; et on peut toujours se débrouiller pour que le dénominateur soit positif : par exemple, $\frac{7}{-3} = \frac{-7}{3}$
On peut même imposer que p et q soient premiers entre eux : si x est un nombre rationnel, il existe en fait un unique couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{p}{q}$ et tels que p et q soient premiers entre eux. $\frac{p}{q}$ est alors l'écriture de x sous forme de fraction irréductible.
Le fait que p et q soient premiers entre eux garantit bien l'impossibilité de simplifier la fraction $\frac{p}{q}$.
Considérer cette écriture sous forme de fraction irréductible peut s'avérer utile dans certaines démonstrations, comme celle de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, consultable ici.

Correction de l'exercice 6 :

1) *On nous demande de justifier que pour tout réel positif M, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite (2^n) sont supérieurs ou égaux à M... Mais.. Ce n'est pas une histoire de limite, ça ?*

$2 > 1$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$. Par définition de cette limite, nous pouvons conclure ce qui suit : $\boxed{\text{pour tout réel positif } M\text{, il existe un entier naturel } n_0 \text{ tel que : } \forall n \geq n_0,\ 2^n \geq M}$

Ca suffit vraiment ? Oui oui, il suffisait de penser à la limite en $+\infty$ de 2^n et d'avoir la définition en tête. Au cas où, vous pouvez vous rafraîchir la mémoire ici. Mais on pouvait aussi répondre à la question de manière plus calculatoire, en résolvant une inéquation :

Soit un réel positif M. Si $M = 0$, on a : pour tout $n \geq 0$, $2^n \geq M$. Donc $n_0 = 0$ convient.

Si $M > 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq M \iff \ln(2^n) \geq \ln(M)$ par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff n\ln(2) \geq \ln(M) \iff n \geq \dfrac{\ln(M)}{\ln(2)}$.

Traiter le cas $M = 0$ à part était nécessaire pour appliquer $\ln$

Il existe bien un entier naturel n_0 tel que la dernière inégalité soit vérifiée. Tout entier naturel n_0 supérieur ou égal au réel fixé $\dfrac{\ln(M)}{\ln(2)}$ convient. Si on veut en expliciter un (même si personne ne nous y oblige) :

$n_0 = \max\left(\left\lfloor \dfrac{\ln(M)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1; 0\right)$ *convient.*

Autrement dit, si $\left\lfloor \dfrac{\ln(M)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$, on prend $n_0 = 1$, et sinon, on prend $n_0 = 0$

« Hein ? C'est quoi, cette expression horrible ? »

Ce n'est pas aussi compliqué que ça en a l'air. On veut un entier supérieur ou égal au réel $\dfrac{\ln(M)}{\ln(2)}$. L'entier $\left\lfloor \dfrac{\ln(M)}{\ln(2)} \right\rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{\ln(M)}{\ln(2)}$. Nous avons donc l'assurance que l'entier $\left\lfloor \dfrac{\ln(M)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$ est supérieur (strictement) à $\dfrac{\ln(M)}{\ln(2)}$

Ok... Mais dans ce cas, pourquoi ne pas avoir dit tout simplement : $n_0 = \left\lfloor \dfrac{\ln(M)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$? Pourquoi se trimballer ce max ? Parce que, depuis un petit moment, nous disons « entier » et pas « entier naturel ». Rien ne dit que l'entier $\left\lfloor \dfrac{\ln(M)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$ est positif. Et comme n_0 doit l'être, nous l'avons défini comme le maximum entre 0 et $\left\lfloor \dfrac{\ln(M)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$

Revenez ici si vous estimez utile un rappel sur la partie entière.

2) Soit α un nombre de Liouville. Par définition : pour tout entier $n \geq 1$, il existe un couple $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0;1\})$ tel que : $0 < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left(\frac{1}{q_n}\right)^n$

Bon, un début timide, où l'on ne fait que rappeler la définition donnée par l'énoncé... Comment prouver qu'un tel nombre est irrationnel ? Dans l'extrême majorité des cas, pour montrer qu'un nombre est irrationnel, on raisonne par l'absurde : on suppose par l'absurde qu'il est rationnel, et on essaye d'aboutir à une contradiction.
Pourquoi un raisonnement par l'absurde ? Parce qu'on ne sait définir un nombre irrationnel que par la négation : c'est un nombre non rationnel. Et en supposant par l'absurde qu'un nombre est rationnel, on peut partir de l'écriture d'un nombre rationnel et travailler dessus...

Supposons par l'absurde que α est rationnel. Par définition, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha = \frac{p}{q}$

Prenons-nous p et q premiers entre eux, comme nous en avons le droit (cf remarques sur l'énoncé) ? Nous verrons si nous en aurons besoin.

Pour tout entier $n \geq 1$, il existe donc $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0;1\})$ tel que : $0 < \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left(\frac{1}{q_n}\right)^n$

Autrement dit : $0 < \left|\frac{pq_n - qp_n}{qq_n}\right| < \left(\frac{1}{q_n}\right)^n$

Que faire de tout ce beau monde ? Essayons de remanier un peu cet encadrement pour ne nous retrouver qu'avec des entiers (et pas des fractions d'entiers).

En multipliant cet encadrement par $q \times q_n^n > 0$, nous obtenons : $0 < |pq_n - qp_n| \times q_n^{n-1} < q$

Ça a encore l'air bien compliqué... Surtout ce $|pq_n - qp_n|$ là... Court-circuitons la difficulté, en nous rappelant juste la nature de cet objet mathématique.

Par somme et produit d'entiers relatifs, $pq_n - qp_n$ est un entier relatif. Donc $|pq_n - qp_n|$ est un entier naturel. De plus, il est non nul, sinon, nous aurions $|pq_n - qp_n| \times q_n^{n-1} = 0$, ce qui interdirait $0 < |pq_n - qp_n| \times q_n^{n-1}$. Nous avons donc $|pq_n - qp_n| \geq 1$.

D'autre part : $q_n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, donc $q_n \geq 2$. Puis, par croissance de la fonction $x \mapsto x^{n-1}$ sur $\mathbb{R}_+$ ($n-1$ étant positif ou nul), nous obtenons : $q_n^{n-1} \geq 2^{n-1}$

En multipliant membre à membre ces deux dernières inégalités dont les membres sont tous positifs, il s'ensuit : $2^{n-1} \leq |pq_n - qp_n| \times q_n^{n-1}$
Et nous avions établi précédemment : $|pq_n - qp_n| \times q_n^{n-1} < q$.
Nous pouvons en conclure : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^{n-1} < q$. Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n < q$ (*)
En effet, lorsque n parcourt $\mathbb{N}^*$, $n-1$ parcourt $\mathbb{N}$.

Mais... Mais... Il y a un problème là ! Et tant mieux, vu que l'on cherche une absurdité.
D'après 1) : pour tout réel $M \geq 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que : $\forall n \geq n_0,\ 2^n \geq M$. Cette propriété, valable pour tout réel $M \geq 0$, est en particulier valable pour $M = q$. Il existe donc un entier naturel n_0 tel que : $\forall n \geq n_0,\ 2^n \geq q$. Cela contredit la propriété (*) établie ci-haut, d'où l'absurdité.

Notre supposition de départ - à savoir le caractère rationnel de α - était donc fausse. En conclusion, α est irrationnel.

Nous avons bien montré ce qui suit : $\boxed{\text{tout nombre de Liouville est irrationnel.}}$

Il était envisageable d'aboutir au résultat de la 2) sans le renfort immédiat de la question 1). Une fois arrivés à (*), nous pouvions passer à la limite (le membre de gauche tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, le membre de droite est constant) et aboutir à une contradiction.

Mais la 1) me semble utile en termes de raisonnement, et elle pouvait faire office de clin d'œil quant à la contradiction attendue en 2).

Exercice 7

Heureux de vos tracas, l'exercice éhonté
compte par tous ces cas vous faire disjoncter.

Énoncé : (temps conseillé : 50 min) (****) *d'après CCINP 2020 MP Maths 1*

On rappelle l'inégalité triangulaire : $\forall\ a,b \in \mathbb{R},\ |a+b| \leq |a|+|b|$.

On note f_0 la fonction définie sur $[0\ ;1]$ par $f_0(x) = x$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\forall x \in [0\ ;1],\ f_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(3x)}{2} & \text{si } x \in \left[0\ ;\dfrac{1}{3}\right] \\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \left]\dfrac{1}{3}\ ;\dfrac{2}{3}\right[\\[2ex] \dfrac{1}{2}+\dfrac{f_n(3x-2)}{2} & \text{si } x \in \left[\dfrac{2}{3}\ ;1\right] \end{cases}$$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer que f_n est à valeurs dans $[0\ ;1]$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer que : $\forall x \in [0\ ;1],\ |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{1}{3 \times 2^{n+1}}$

3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0\ ;1]$, $|f_n(x) - x| \leq \dfrac{1}{3}\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$

Remarques sur l'énoncé :

Rappelons que pour tout réel x, la valeur absolue de x, notée $|x|$, est égale à x lorsque x est positif, et $-x$ lorsque x est négatif. Rappelons, entre autres :
$\forall x,y \in \mathbb{R},\ |xy| = |x| \times |y|$

L'énoncé vous définit la suite (f_n), à savoir une suite de fonctions, et ce à l'aide d'une relation de récurrence. Vous n'avez probablement pas l'habitude de ce genre d'objet. Accrochez-vous à ce que vous savez faire, et aux informations qui vous sont données.

En question 1), on nous demande de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est à valeurs dans $[0\ ;1]$. Autrement dit, il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0\ ;1]$ (domaine de définition de f_n d'après l'énoncé), on a $f_n(x) \in [0\ ;1]$ (toutes les images par f_n doivent être dans $[0\ ;1]$)

Correction de l'exercice 7 :

1) *Il nous est demandé de montrer que toutes les fonctions f_n, dont nous n'avons pas l'expression mis à part f_0, sont à valeurs dans* $[0\,;1]$. *L'information centrale dont nous disposons est le lien entre l'expression de f_{n+1} et celle de f_n.*

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n : « $\forall x \in [0\,;1]$, $f_n(x) \in [0\,;1]$ »
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, P_n est vraie.

Remarquez que dans l'expression de P_n, nous avons mis $\forall x \in [0\,;1]$. Cela augmente la portée de la propriété P_n : à l'étape d'hérédité notamment, l'hypothèse de récurrence nous permettra de l'appliquer à n'importe quel élément de $[0\,;1]$*, pas seulement à un x fixé au préalable. Si vous n'êtes pas sûr d'avoir tout à fait compris cette remarque, attendez l'hérédité, les choses s'y clarifieront.*

Initialisation : Pour tout x appartenant à $[0\,;1]$, $f_0(x) = x \in [0\,;1]$, donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, P_n soit vraie, et montrons que P_{n+1} aussi est vraie.
Supposons donc que : $\forall x \in [0\,;1]$, $f_n(x) \in [0\,;1]$, et montrons : $\forall x \in [0\,;1]$, $f_{n+1}(x) \in [0\,;1]$
Soit $x \in [0\,;1]$.
L'expression de $f_{n+1}(x)$ à l'aide de f_n dépend de la valeur de x. Il va donc falloir faire une disjonction de cas suivant la valeur de x. Dit de manière moins savante, il va falloir distinguer les cas suivant la valeur de x.

• Si $x \in \left[0\,;\frac{1}{3}\right]$, $f_{n+1}(x) = \dfrac{f_n(3x)}{2}$. $0 \leq x \leq \dfrac{1}{3}$ donc $0 \leq 3x \leq 1$. Autrement dit : $3x \in [0\,;1]$

Place à l'éclairage promis : nous allons pouvoir nous servir de l'hypothèse de récurrence P_n en remplaçant x par 3x. Et qu'est-ce qui nous le permet ? Le fait que P_n nous donne une information valable pour n'importe quel réel x dans $[0\,;1]$. *Une personne qui aurait fait le choix de fixer un x de* $[0\,;1]$ *avant la récurrence (en écrivant « Soit $x \in [0\,;1]$ ») aurait posé P_n : « $f_n(x) \in [0\,;1]$ » (pour le x fixé au départ, sans le « $\forall x \in [0\,;1]$ »), et n'aurait donc pas été en mesure, dans l'hérédité, d'utiliser P_n en remplaçant x par 3x. Elle serait donc bloquée à ce stade de la récurrence. Faisons-lui coucou de la main en la laissant revenir sur ses pas, et continuons notre chemin.*

Comme $3x \in [0\,;1]$, P_n nous permet d'affirmer que : $f_n(3x) \in [0\,;1]$. D'où $\dfrac{f_n(3x)}{2} \in [0\,;\dfrac{1}{2}]$.
Donc a fortiori : $\dfrac{f_n(3x)}{2} \in [0\,;1]$, ce qui nous permet d'affirmer : $f_{n+1}(x) \in [0\,;1]$

- Si $x \in \left]\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{2}{3}\right[$, $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2}$ donc : $f_{n+1}(x) \in [0\,;1]$

- Si $x \in \left[\dfrac{2}{3}\,;1\right]$, $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{f_n(3x-2)}{2}$ avec $\dfrac{2}{3} \leq x \leq 1$ donc $2 \leq 3x \leq 3$ puis $0 \leq 3x-2 \leq 1$

L'hypothèse de récurrence de P_n nous permet d'affirmer : $0 \leq f_n(3x-2) \leq 1$

Par suite : $0 \leq \dfrac{f_n(3x-2)}{2} \leq \dfrac{1}{2}$. Puis : $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{f_n(3x-2)}{2} \leq 1$, et on a bien, en particulier : $\dfrac{1}{2} + \dfrac{f_n(3x-2)}{2} \in [0\,;1]$. D'où : $f_{n+1}(x) \in [0\,;1]$

Nous avons bien montré : $\forall x \in [0\,;1],\ f_{n+1}(x) \in [0\,;1]$. P_{n+1} est donc vraie.

<u>Conclusion</u> : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure que pour tout entier naturel n, P_n est vraie.
$\boxed{\text{Autrement dit, pour tout entier naturel } n,\ f_n \text{ est à valeurs dans } [0\,;1].}$

2) *Peut-on parvenir à l'inégalité demandée par un calcul direct ? Il semble difficile d'exprimer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ avec les informations données. Et ce 2^{n+1} au dénominateur du second membre de l'inégalité... Comment pourrait-il apparaître, sinon... par récurrence.*
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété Q_n : « $\forall x \in [0\,;1],\ \left|f_{n+1}(x) - f_n(x)\right| \leq \dfrac{1}{3 \times 2^{n+1}}$ »

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, Q_n est vraie.

<u>Initialisation</u> : Pour tout x appartenant à $[0\,;1]$, $\left|f_1(x) - f_0(x)\right| = \left|f_1(x) - x\right|$.
Il faut montrer que cette quantité est toujours inférieure ou égale à $\dfrac{1}{3 \times 2^1}$, c-à-d à $\dfrac{1}{6}$

- Si $x \in \left[0\,;\dfrac{1}{3}\right]$, $\left|f_1(x) - f_0(x)\right| = \left|\dfrac{f_0(3x)}{2} - x\right| = \left|\dfrac{3x}{2} - x\right| = \left|\dfrac{x}{2}\right| = \dfrac{x}{2}$ car $\dfrac{x}{2} \geq 0$
Or (dans ce cas) : $x \leq \dfrac{1}{3}$, donc : $\dfrac{x}{2} \leq \dfrac{1}{3 \times 2}$. D'où : $\left|f_1(x) - f_0(x)\right| \leq \dfrac{1}{6}$

- Si $x \in \left]\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{2}{3}\right[$, $\left|f_1(x) - f_0(x)\right| = \left|\dfrac{1}{2} - x\right|$

Utiliser l'inégalité triangulaire n'aboutit à rien d'intéressant ici : elle permet d'écrire $|\frac{1}{2}-x| \leq \frac{1}{2}+x < \frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$ *(alors qu'on voulait majorer par* $\frac{1}{6}$*)*

Attention : l'inégalité triangulaire ne dit PAS $|a-b| \leq |a|-|b|$*. Mais elle permet bien d'écrire :* $|a-b| = |a+(-b)| \leq |a|+|-b| = |a|+|b|$*. D'où :* $|a-b| \leq |a|+|b|$

Si l'inégalité triangulaire ne sert pas ici pour montrer $|\frac{1}{2}-x| \leq \frac{1}{6}$*, que faire d'autre ? Essayons de nous débarrasser (légalement) de la valeur absolue. Il nous faut donc nous intéresser au signe de* $\frac{1}{2}-x$

Remarquons : $\frac{1}{2} \in \left]\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right[$. Pour tout $x \in \left]\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right[$:

- si $x \in \left]\frac{1}{3}\,;\frac{1}{2}\right]$, $\frac{1}{2}-x \geq 0$ donc $|\frac{1}{2}-x| = \frac{1}{2}-x$, avec $x > \frac{1}{3}$, d'où $-x < -\frac{1}{3}$, puis $\frac{1}{2}-x < \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

- si $x \in \left]\frac{1}{2}\,;\frac{2}{3}\right[$, $\frac{1}{2}-x < 0$ donc $|\frac{1}{2}-x| = x-\frac{1}{2}$, avec $x < \frac{2}{3}$, d'où $x-\frac{1}{2} < \frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

Nous avons donc montré : $\forall x \in \left]\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right[$, $\left|f_1(x)-f_0(x)\right| \leq \frac{1}{3\times 2}$

• Enfin, si $x \in \left]\frac{2}{3}\,;1\right]$, $|f_1(x)-f_0(x)| = |\frac{1}{2}+\frac{f_0(3x-2)}{2}-x| = |\frac{1}{2}+\frac{3x-2}{2}-x| = |\frac{x-1}{2}|$ avec $x-1 \leq 0$, d'où $\frac{x-1}{2} \leq 0$. Donc $|\frac{x-1}{2}| = \frac{1-x}{2}$. Or, $x > \frac{2}{3}$ donc $-x < -\frac{2}{3}$, puis $1-x < \frac{1}{3}$, et enfin : $\frac{1-x}{2} < \frac{1}{6}$. Nous avons donc montré : $\forall x \in \left]\frac{2}{3}\,;1\right]$, $\left|f_1(x)-f_0(x)\right| \leq \frac{1}{6}$

Finalement : $\forall x \in [0\,;1]$, $\left|f_1(x)-f_0(x)\right| \leq \frac{1}{6}$. Autrement dit, Q_0 est vraie.

Si vous pensiez que toutes les initialisations étaient immédiates...

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, Q_n soit vraie, et montrons que Q_{n+1} aussi est vraie.
Supposons donc que : $\forall x \in [0\,;1]$, $\left|f_{n+1}(x)-f_n(x)\right| \leq \frac{1}{3\times 2^{n+1}}$, et montrons : $\forall x \in [0\,;1]$, $\left|f_{n+2}(x)-f_{n+1}(x)\right| \leq \frac{1}{3\times 2^{n+2}}$. Soit $x \in [0\,;1]$.

• Si $x \in \left[0\,;\frac{1}{3}\right]$, $\left|f_{n+2}(x)-f_{n+1}(x)\right| = \left|\frac{f_{n+1}(3x)}{2}-\frac{f_n(3x)}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\Big(f_{n+1}(3x)-f_n(3x)\Big)\right|$
$= \frac{1}{2}\left|f_{n+1}(3x)-f_n(3x)\right|$. Or, par hypothèse de récurrence, $\left|f_{n+1}(3x)-f_n(3x)\right| \leq \frac{1}{3\times 2^{n+1}}$

Comme pour la récurrence de la question 1), l'hypothèse de récurrence Q_n nous donne un résultat valable pour tout réel x de $[0\,;1]$. Ici, $3x \in [0\,;1]$, ce qui nous a permis d'appliquer l'inégalité de Q_n à $3x$.

Donc $\dfrac{1}{2}\left|f_{n+1}(3x)-f_n(3x)\right| \leq \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3\times 2^{n+1}}$. Autrement dit : $\left|f_{n+2}(x)-f_{n+1}(x)\right| \leq \dfrac{1}{3\times 2^{n+2}}$

- Si $x \in \left]\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{2}{3}\right[$, $\left|f_{n+2}(x)-f_{n+1}(x)\right| = \left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right| = 0 \leq \dfrac{1}{3\times 2^{n+2}}$
- Si $x \in \left[\dfrac{2}{3}\,;1\right]$, $\left|f_{n+2}(x)-f_{n+1}(x)\right| = \left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{f_{n+1}(3x-2)}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{f_n(3x-2)}{2}\right|$

$= \dfrac{1}{2}\left|f_{n+1}(3x-2)-f_n(3x-2)\right| \leq \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3\times 2^{n+1}}$ par hypothèse de récurrence. Donc, dans ce cas aussi : $\left|f_{n+2}(x)-f_{n+1}(x)\right| \leq \dfrac{1}{3\times 2^{n+2}}$

Nous avons bien montré : $\forall x \in [0\,;1]$, $\left|f_{n+2}(x)-f_{n+1}(x)\right| \leq \dfrac{1}{3\times 2^{n+2}}$. Q_{n+1} est donc vraie.

Une fois n'est pas coutume, l'hérédité s'est avérée plus simple - sur le plan calculatoire - que l'initialisation.

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure que pour tout entier naturel n, Q_n est vraie.

$\boxed{\text{Autrement dit, pour tout entier naturel } n,\ \left|f_{n+1}(x)-f_n(x)\right| \leq \dfrac{1}{3\times 2^{n+1}}}$ *Ouf.*

3) *Comment ça, encore une récurrence ? Ben... Que voulez-vous faire d'autre...*

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété R_n : « $\forall x \in [0\,;1]$, $|f_n(x)-x| \leq \dfrac{1}{3}\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ »

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, R_n est vraie.

Initialisation : Pour tout x appartenant à $[0\,;1]$, $\left|f_0(x)-x\right| = \left|x-x\right| = 0$.

Et $\dfrac{1}{3}\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^0\right) = \dfrac{1}{3}(1-1) = 0$. D'où : $\left|f_0(x)-x\right| \leq \dfrac{1}{3}\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^0\right)$. R_0 est donc vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, R_n soit vraie, et montrons que R_{n+1} aussi est vraie. Supposons donc que : $\forall x \in [0\,;1]$, $|f_n(x)-x| \leq \dfrac{1}{3}\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$, et montrons : $\forall x \in [0\,;1]$, $|f_{n+1}(x)-x| \leq \dfrac{1}{3}\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

Est-il pertinent de faire une disjonction de cas en découpant l'intervalle $[0\,;1]$ *comme pour* *les deux récurrences précédentes ? Cela ne semble pas nécessaire ici, vu que le résultat de la 2) ne dépend pas de l'appartenance de x à* $\left[0\,;\frac{1}{3}\right]$, $\left]\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right[$ *ou* $\left[\frac{2}{3}\,;1\right]$

Soit $x \in [0\,;1]$. *Comment montrer que* $|f_{n+1}(x) - x| \leq \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$ *à l'aide de l'hypothèse de récurrence ? Astuce : faisons apparaître (légalement)* $f_n(x)$ *dans* $|f_{n+1}(x) - x|$ *:*

$|f_{n+1}(x) - x| = |f_{n+1}(x) - f_n(x) + f_n(x) - x| \leq |f_{n+1}(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - x|$ d'après l'inégalité triangulaire *Ah, la voilà !*

Or, d'une part : $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{1}{3 \times 2^{n+1}}$ d'après 2), et d'autre part :
$|f_n(x) - x| \leq \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)$ par hypothèse de récurrence.

Donc : $|f_{n+1}(x) - x| \leq |f_{n+1}(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - x| \leq \dfrac{1}{3 \times 2^{n+1}} + \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)$

Vu ce à quoi l'on voudrait aboutir, il semble judicieux de factoriser par $\frac{1}{3}$

D'où : $|f_{n+1}(x) - x| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 1 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

Nous avons bien montré : $\forall x \in [0\,;1]$, $|f_{n+1}(x) - x| \leq \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$ R_{n+1} est donc vraie.

<u>Conclusion</u> : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure que pour tout entier naturel n, R_n est vraie.

$\boxed{\text{Autrement dit, pour tout entier naturel } n,\ \left|f_n(x) - x\right| \leq \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)}$

La récurrence était-elle évitable ? Pour un élève au sortir de la Terminale, c'est faisable en théorie avec un raisonnement plus direct, même s'il me semble compliqué d'y penser seul. Avant de l'exposer, présentons deux notions qui seront utiles pour le suivre :

- Un petit rappel (ou une découverte pour ceux qui n'auraient pas regardé la correction de l'exercice 3) du principe du télescopage pourra vous être utile. Ici, pour tout $n \geq 1$, *pour tout* $x \in [0\,;1]$, $\sum_{k=0}^{n-1} \left(f_{k+1}(x) - f_k(x)\right) = f_n(x) - f_0(x)$

En effet : $\sum_{k=0}^{n-1} \left(f_{k+1}(x) - f_k(x)\right) = f_1(x) - f_0(x) + f_2(x) - f_1(x) + f_3(x) - f_2(x) + \ldots + f_n(x) - f_{n-1}(x)$

Et, après simplification, ne restent plus que $f_n(x)$ *et* $-f_0(x)$ *Pour des explications détaillées sur le télescopage en général, n'hésitez pas à consulter* <u>cette vidéo-ci</u> *de la playlist « Dé-*

mystifier Σ *»*

- L'inégalité triangulaire rappelée en début d'énoncé se généralise à une somme de plusieurs termes : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ a_1, a_2, ..., a_N,\ \ \left|a_1 + a_2 + ... + a_N\right| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_N|$.
Autrement dit : $\left|\sum\limits_{k=1}^{N} a_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{N} |a_k|$. *Cela s'obtient, à partir de l'inégalité triangulaire classique, par récurrence.*

Forts de tout cela, plutôt que de nous lancer dans une récurrence, nous pouvions écrire :
$\forall n \geq 1,\ \forall x \in [0\ ;1],\ |f_n(x) - x| = |f_n(x) - f_0(x)| = \left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(f_{k+1}(x) - f_k(x)\right)\right|$ *par télescopage (une égalité étant bien entendu utilisable dans les deux sens)*
Et $\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(f_{k+1}(x) - f_k(x)\right)\right| \leq \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left|f_{k+1}(x) - f_k(x)\right|$ *d'après l'inégalité triangulaire*

Or, d'après 2) : $\forall k \in \mathbb{N},\ \left|f_{k+1}(x) - f_k(x)\right| \leq \dfrac{1}{3 \times 2^{k+1}}$

Donc : $|f_n(x) - x| \leq \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{3 \times 2^{k+1}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$

$\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ *est une somme de n termes consécutifs (oui, n, on compte de* 0 *à* $n-1$*) d'une suite géométrique de raison* $\dfrac{1}{2}$ *(différente de* 1*), et le premier terme de la somme est* 1*. Nous savons donc :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \qquad \textit{(1er terme de la somme)} \times \frac{1 - \textit{raison}^{\textit{nb de termes}}}{1 - \textit{raison}}$$

D'où : $|f_n(x) - x| \leq \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$

Cool, on a fini. Enfin, pas tout à fait. On a montré l'inégalité demandée, pour tout $n \geq 1$*, pour tout* $x \in [0\ ;1]$*. Elle nous manque pour* $n = 0$*. On le fait à part, en procédant de même que pour l'initialisation de la récurrence.*

Exercice 8

Voici donc ce à quoi l'énoncé vous invite :
tordre cette intégrale et trouver sa limite

Énoncé : (temps conseillé : 25 min) (**) *d'après Mines-Ponts 2020 MP Maths 2*

Pour $x \in [2;\ +\infty[$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$

1) Justifier que la fonction I est bien définie sur $[2\ ;\ +\infty[$, puis qu'elle est dérivable sur $[2;\ +\infty[$. Déterminer les variations de I sur $[2;\ +\infty[$.

2) Justifier, pour $\forall x \in [2\ ;\ +\infty[$, la relation : $I(x) = \dfrac{x}{\ln(x)} - \dfrac{2}{\ln(2)} + \displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t$

3) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$

Remarques sur l'énoncé :

Le début de la question 1 nous demande d'expliquer pourquoi, pour tout réel x de $[2\ ;\ +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ existe.

L'un des enjeux de l'exercice est de vous faire redoubler de prudence quant à la distinction entre la variable x de la fonction I, et la variable d'intégration choisie dans l'expression de $I(x)$, à savoir t.

Dans la relation demandée en 2), $\ln^2(t)$ est tout simplement $\big(\ln(t)\big)^2$. Vous avez très probablement déjà été confronté à ce genre de notation avec $\cos^2(t)$ et $\sin^2(t)$.

Correction de l'exercice 8 :

1) La fonction ln est continue sur $[2\ ;\ +\infty[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle. Par quotient, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est aussi continue sur $[2\ ;\ +\infty[$.

Soit $x \in [2\ ;\ +\infty[$. Comme $[2\ ;\ x] \subset [2\ ;\ +\infty[$, f est continue sur $[2\ ;\ x]$. L'intégrale $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\, dt$ est donc bien définie. Autrement dit, $I(x)$ est bien défini.
$\boxed{\text{La fonction } I \text{ est donc bien définie sur } [2\ ;\ +\infty[.}$

De plus, en notant F une primitive de f sur $[2\ ;\ +\infty[$ (primitive qui existe par continuité de f sur $[2\ ;\ +\infty[$), nous avons : $\forall x \in [2\ ;\ +\infty[,\ I(x) = F(x) - F(2)$
F est, par définition, dérivable sur $[2\ ;\ +\infty[$, et $F' = f$
$\boxed{I \text{ est donc dérivable sur } [2\ ;\ +\infty[}$ et : $\forall x \in [2\ ;\ +\infty[,\ I'(x) = F'(x) = f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$

Attention à ne pas faire l'erreur - largement répandue - d'écrire : $I'(x) = F'(x) - F'(2)$. $F(2)$ *est une constante ! En la dérivant par rapport à x, on obtient donc* 0.

ln étant strictement positive sur $]1\ ;\ +\infty[$, et donc a fortiori sur $[2\ ;\ +\infty[$, nous en déduisons : $\forall x \in [2\ ;\ +\infty[,\ I'(x) > 0$. Enfin, $\boxed{I \text{ est strictement croissante sur } [2\ ;\ +\infty[.}$

2) *La relation demandée ressemble beaucoup à ce qu'obtiendrait quelqu'un qui aurait effectué une intégration par parties... Mais... Il n'y a pas de produit dans l'intégrale. Allez, un peu d'imagination...*

Pour tout $x \in [2\ ;\ +\infty[$, $I(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln(t)} \times 1\, dt = \int_2^x u(t) \times v'(t)\, dt$

où u et v sont les fonctions définies sur $[2\ ;\ +\infty[$ par $u(t) = \dfrac{1}{\ln(t)}$ et $v(t) = t$

u et v sont dérivables sur $[2\ ;\ +\infty[$ (donc sur $[2\ ;\ x]$) et leurs dérivées, respectivement définies par $u'(t) = -\dfrac{\ln'(t)}{\ln^2(t)} = -\dfrac{\ln'(t)}{\ln^2(t)} = -\dfrac{\frac{1}{t}}{\ln^2(t)} = -\dfrac{1}{t\ln^2(t)}$ et $v'(t) = 1$, sont continues sur $[2\ ;\ +\infty[$ (donc sur $[2\ ;\ x]$)

Autrement dit (comme mentionné dans l'exercice 4), u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ *sur* $[2\ ;\ +\infty[$
Une intégration par parties fournit :

$$\forall x \in [2\ ;\ +\infty[,\ I(x) = \Big[u(t)v(t)\Big]_2^x - \int_2^x u'(t)\times v(t)\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t}{\ln(t)}\right]_2^x - \int_2^x -\frac{1}{t\ln^2(t)}\times t\ \mathrm{d}t$$

Nous obtenons enfin : $\boxed{\forall x \in [2\ ;\ +\infty[,\ I(x) = \dfrac{x}{\ln(x)} - \dfrac{2}{\ln(2)} + \displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln^2(t)}\ \mathrm{d}t}$

3) *Et là, tout d'un coup, on nous demande la limite en $+\infty$ de $I(x)$... Que faire de la dernière expression obtenue ? L'intégrale de droite à de quoi nous inquiéter. Ou alors... Ou alors on se rend juste compte que c'est une quantité positive, et on dégaine un théorème qui nous permet de plier ce calcul de limite.*

Pour tout réel x appartenant à $[2\ ;\ +\infty[$, pour tout réel t appartenant à $[2\ ;\ x]$, $\dfrac{1}{\ln^2(t)} \geq 0$

Par croissance de l'intégrale : $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln^2(t)}\ \mathrm{d}t \geq 0$ *Les bornes sont dans le bon sens* $(2 \leq x)$

Il s'ensuit : $\forall x \in [2\ ;+\infty[,\ I(x) \geq \dfrac{x}{\ln(x)} - \dfrac{2}{\ln(2)}$ (*)

Or, par croissance comparée : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$.
Donc, par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} = +\infty$

L'inégalité (*) et le théorème de comparaison nous permettent de conclure : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I(x) = +\infty}$

L'expression initiale donnée pour $I(x)$ ne permettait pas simplement de calculer sa limite en $+\infty$. Nous étions tiraillés entre le fait que l'on intègre entre 2 et x avec x tendant vers $+\infty$ d'une part, et le fait que la fonction intégrée $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ tend vers 0 en $+\infty$ d'autre part.

En deuxième année, vous disposerez de nouveaux outils - notamment de comparaisons de convergences d'intégrales - qui vous permettront de conclure plus rapidement quant à la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\ dt$

Exercice 9

Les inégalités, les tangentes, les cordes
ne sauraient effrayer ma plume monocorde.

Énoncé : (temps conseillé : 50 min) (***) *d'après Centrale 2018 MP Maths 1*

1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit f une fonction convexe sur I. Soient a et b appartenant à I, avec $a < b$, et soit $\lambda \in [0;\ 1]$.
a) Justifier que $\lambda a + (1-\lambda)b \in [a;\ b]$.
b) Montrer que $f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$
On pourra utiliser la position de la courbe de f par rapport à ses sécantes (ou cordes).
c) Justifier que l'inégalité précédente reste valable pour tous a et b appartenant à I.

2) Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Montrer que pour tous réels positifs a et b, $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$

Remarques sur l'énoncé :

A partir de l'inégalité de convexité établie en 1)b) et 1)c), il est possible d'obtenir cette inégalité de convexité généralisée (ou inégalité de Jensen) :
pour tout entier $n \geq 2$, on a : pour tous $x_1, x_2, ., x_n \in I$, pour tous $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \geq 0$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, $f\big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\big) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$ C'est l'objet de cet exercice (difficile).

L'inégalité que la question 2) nous demande d'établir est connue sous le nom d'inégalité de Young.

Correction de l'exercice 9 :

1)a) *Une première question en apparence relativement gentille...*
$a \leq b$ et $\lambda \in [0;\ 1]$, donc $\lambda \geq 0$ et $1-\lambda \geq 0$.
Donc $\lambda a + (1-\lambda)a \leq \lambda a + (1-\lambda)b \leq \lambda b + (1-\lambda)b$. Autrement dit : $a \leq \lambda a + (1-\lambda)b \leq b$
Nous avons bien montré : $\boxed{\lambda a + (1-\lambda)b \in [a;\ b]}$

En toute rigueur, la justification ci-haut suffit à établir le résultat demandé. On multiplie des inégalités par λ et $1-\lambda$: il était donc important de préciser leur positivité. Si c'est allé trop vite à votre goût, voici une rédaction plus détaillée, en aboutissant séparément aux deux inégalités qui constituent l'encadrement demandé. Partant de $a \leq b$:
D'une part, $\lambda \geq 0$ donc $\lambda a \leq \lambda b$. Puis : $\lambda a + (1-\lambda)b \leq \lambda b + (1-\lambda)b$. Donc : $\underline{\lambda a + (1-\lambda)b \leq b}$
D'autre part, $\lambda \leq 1$, donc $1-\lambda \geq 0$. D'où : $(1-\lambda)b \geq (1-\lambda)a$. Puis : $\lambda a + (1-\lambda)b \geq \lambda a + (1-\lambda)a$.
Donc : $\underline{\lambda a + (1-\lambda)b \geq a}$. Les deux inégalités soulignées donnent l'encadrement demandé.

1)b) f est convexe sur I, et a et b sont deux réels de cet intervalle. La corde (ou sécante) (d) joignant les points d'abscisses a et b de la courbe $\mathscr{C}_f$ de f est donc au-dessus de $\mathscr{C}$ sur le segment $[a;\ b]$ (*ici, on a bien $a < b$*)

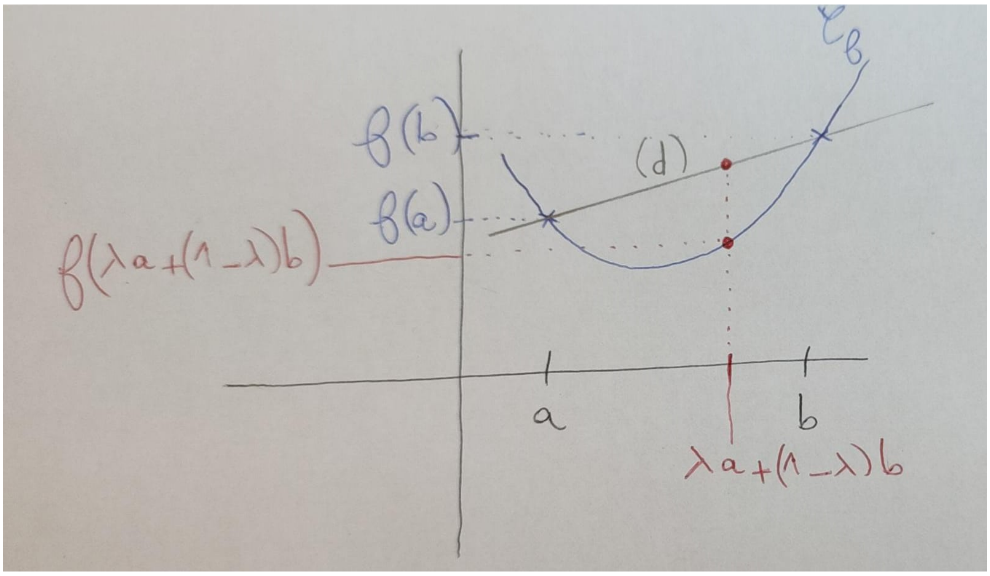


Schéma à main levée (encore...) représentant la situation.
La sécante (d) est au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $[a;\ b]$

De plus, d'après 1)a) : $\lambda a + (1-\lambda)b \in [a;\ b]$.

Et $f\big(\lambda a+(1-\lambda)b\big)$ est l'ordonnée du point de la courbe de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $\lambda a+(1-\lambda)b$

Point que nous avons placé sur la courbe. Il était intéressant de voir à quoi correspond géométriquement ce fameux $f\big(\lambda a+(1-\lambda)b\big)$, membre de gauche de l'inégalité demandée.

Ce point est situé en-dessous du point de même abscisse situé sur la droite (d).

On aimerait bien avoir l'ordonnée de ce dernier point d'abscisse $\lambda a+(1-\lambda)b$ et situé sur la droite (d) : on pourrait alors affirmer que $f\big(\lambda a+(1-\lambda)b\big)$ est inférieur ou égal à cette ordonnée. Et avec un peu de chance, cette ordonnée serait...

Notons M le point d'abscisse $\lambda a+(1-\lambda)b$ et situé sur la droite (d). $M(x_M, y_M)$ avec $x_M=\lambda a+(1-\lambda)b$ et y_M à déterminer. De même, soient les points $A\big(a, f(a)\big)$ et $B\big(b, f(b)\big)$. *La droite (d) est donc en fait la droite* (AB).

Les points A, M et B étant alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M-a \\ y_M-f(a)\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} b-a \\ f(b)-f(a)\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
Donc $(x_M-a)\big(f(b)-f(a)\big)-(b-a)\big(y_M-f(a)\big)=0$ *Oui, un déterminant si vous voulez...*
Dans cette égalité, isolons notre inconnue y_M (et remplaçons x_M par son expression connue).
D'où : $(b-a)\big(y_M-f(a)\big)=\big(\lambda a+(1-\lambda)b-a\big)\big(f(b)-f(a)\big)$
Autrement dit : $(b-a)\big(y_M-f(a)\big)=\big((\lambda-1)a+(1-\lambda)b\big)\big(f(b)-f(a)\big)$
Il y a moyen de factoriser par $\lambda-1$ à droite... Ben oui, $\lambda-1=-(1-\lambda)$
Donc : $(b-a)\big(y_M-f(a)\big)=(1-\lambda)(b-a)\big(f(b)-f(a)\big)$

Ce serait sympa de simplifier par $b-a$ des deux côtés... Mais il faut avoir conscience de l'opération mathématique qui se cache derrière le mot « simplifier » , pour pouvoir, le cas échéant, justifier son application si nécessaire. Ici en l'occurrence, il s'agit de diviser par $b-a$.
Comme $b-a\neq 0$, nous pouvons en déduire : $y_M-f(a)=(1-\lambda)\big(f(b)-f(a)\big)$
Puis : $y_M=(1-\lambda)\big(f(b)-f(a)\big)+f(a)=(1-\lambda)f(b)-(1-\lambda)f(a)+f(a)$

Remarquez que dans la dernière ligne, je ne me suis pas senti obligé de développer $(1-\lambda)\big(f(b)-f(a)\big)$ en quatre termes. Je n'avais pas d'intérêt à casser le $1-\lambda$. Par contre, j'ai séparé le $f(a)$ et le $f(b)$ parce qu'ils sont séparés dans le résultat que j'escompte.

Donc : $y_M = (1-\lambda)f(b) + (1-1+\lambda)f(a) = \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$. *Ouf!*

Et rappelons : $f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \le y_M$. Finalement : $\boxed{f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \le \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)}$

Il était possible d'aboutir à l'expression de y_M d'une autre manière, moins efficace (un brin plus calculatoire) mais peut-être plus intuitive pour certains : à partir des coordonnées des deux points $A\big(a, f(a)\big)$ et $B\big(b, f(b)\big)$, on pouvait déterminer l'équation de la droite (d). Par définition, son coefficient directeur est $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Quant à son ordonnée à l'origine (appelons-la β), on peut l'obtenir en se servant par exemple du fait que les coordonnées de A vérifient l'équation de (d). Autrement dit : $y_A = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x_A + \beta$

Puis : $\beta = y_A - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x_A = f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \times a$

(d) a donc pour équation : $y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x + f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \times a$ *Pas très joli...*

Sous une forme plus condensée, (d) : $y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$

Pour obtenir y_M, il ne reste plus qu'à remplacer x par l'expression de x_M dans l'équation précédente et, après calculs, vous obtiendrez : $y_M = \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$

1)c) *Que nous veut cette question ? L'inégalité établie dans la question précédente n'est-elle déjà pas valable pour tous a et b appartenant à I ? Non : pour l'instant, elle l'est uniquement dans le cas $a < b$.*

Soient a et b appartenant à I et soit $\lambda \in [0;\ 1]$.

• Si $a < b$, l'inégalité demandée est établie d'après 1)b).

• Si $a = b$: d'une part, $f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) = f\big(\lambda a + (1-\lambda)a\big) = f(a)$ et d'autre part : $\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) = \lambda f(a) + (1-\lambda)f(a) = f(a)$. L'inégalité demandée est donc établie (au sens large, c'est une égalité ici).

• Si $a > b$, en posant $\lambda' = 1-\lambda$, $a' = b$ et $b' = a$, nous avons :
$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) = f\big((1-\lambda')b' + \lambda' a'\big) = f\big(\lambda' a' + (1-\lambda')b'\big)$ avec $\lambda' \in [0;\ 1]$ et $a' < b'$.
D'après 1)b) : $f\big(\lambda' a' + (1-\lambda')b'\big) \le \lambda' f(a') + (1-\lambda')f(b')$

1)b) est en effet valable pour tous a et b de I tels que $a < b$ (nos a' et b' conviennent donc) et pour tout $\lambda \in [0;\ 1]$ (notre λ' convient donc).
Autrement dit : $f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$

Nous avons bien établi : $\boxed{\forall \lambda \in [0;\ 1],\ \forall a, b \in I,\ f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)}$

2) *Que vient faire une telle question à la fin de cet exercice ? Peut-être faut-il s'aider d'une fonction convexe pour aboutir à l'inégalité demandée ? Mais laquelle ? Et qui serait λ ici ? Dans la question 1), λ et $1-\lambda$ sont deux réels positifs dont la somme est égale à 1...*

Par ailleurs, la fonction ln *pourrait permettre de transformer en somme le produit dans le membre de gauche de l'inégalité à obtenir... Mais elle n'est pas convexe, elle est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. En outre, attention, dans l'énoncé, rien n'interdit à a et/ou à b d'être nul.*

Soient a et b deux réels positifs. Si l'un (au moins) des deux est nul, $ab = 0$. Et $\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \ge 0$.
Nous avons donc bien, dans ce cas : $ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$

Supposons maintenant a et b tous deux strictement positifs. La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comparer ab et $\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ revient donc à comparer $\ln(ab)$ et $\ln\Big(\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}\Big)$. D'une part, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

D'autre part, en posant $\lambda = \dfrac{1}{p}$: $\ln\Big(\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}\Big) = \ln\Big(\dfrac{a^p}{p} + (1 - \dfrac{1}{p})b^q\Big) = \ln\big(\lambda a^p + (1-\lambda)b^q\big)$
Remarquons : $1 - \lambda = \dfrac{1}{q}$

La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
Résultat connu, mais si l'on vous demande une justification : ln *est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$*

Autrement dit, $-\ln$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$
Haha ! Par cette petite remarque à l'apparence anodine, le résultat de 1) s'ouvre à moi dans toute sa splendeur.
Comme a^p et b^q appartiennent à $\mathbb{R}_+^*$, 1)c) nous permet d'affirmer :
$-\ln\big(\lambda a^p + (1-\lambda)b^q\big) \le \lambda \times \big(-\ln(a^p)\big) + (1-\lambda) \times \big(-\ln(b^q)\big)$. En multipliant par $-1 < 0$:
$\ln\big(\lambda a^p + (1-\lambda)b^q\big) \ge \lambda \ln(a^p) + (1-\lambda)\ln(b^q)$. Autrement dit :

$\ln\left(\lambda a^p + (1-\lambda)b^q\right) \geq \lambda p \ln(a) + (1-\lambda) q \ln(b)$

N'oublions pas qui nous avons appelé λ ici... (Et qui est $1-\lambda$)

Nous avons en fait établi : $\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \times p \ln(a) + \frac{1}{p} \times q \ln(b)$
C'est-à-dire : $\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \ln(a) + \ln(b)$. Ou encore : $\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \ln(ab)$

Enfin : $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$

Pour justifier le dernier passage, on peut, si l'on veut, rappeler que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Mais nous avons rappelé précédemment - ce qui revient au même - que la stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, et ce qui s'ensuit : comparer ab et $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ revient à comparer $\ln(ab)$ et $\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$

Nous avons bien montré que pour tous réels positifs a et b, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Exercice 10

Que les fureurs groupées de nos calculs calcinent
ce x qu'ont abrité l'intégrale et le sin.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min) (****) *d'après Mines-Ponts 2023 MP Maths 2*

On rappelle l'inégalité triangulaire : $\forall\ a,b \in \mathbb{R},\ |a+b| \leq |a|+|b|$.

On donne aussi l'inégalité triangulaire pour les intégrales : pour tous réels a et b tels que $a \leq b$, pour toute fonction f continue sur $[a\ ;\ b]$, $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$

Soit φ une fonction dérivable sur $[0\ ;\ \pi]$, telle que φ' est continue sur $[0\ ;\ \pi]$.

Démontrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = 0$

Remarques sur l'énoncé :

Rappelons que pour tout réel x, la valeur absolue de x, notée $|x|$, est égale à x lorsque x est positif, et $-x$ lorsque x est négatif. Rappelons, entre autres :
$\forall x,y \in \mathbb{R},\ |xy| = |x| \times |y|$

Si l'on veut utiliser l'inégalité triangulaire pour les intégrales, Les bornes doivent être dans le sens croissant ($a \leq b$)*, comme pour la croissance de l'intégrale (lorsque l'on veut intégrer une inégalité).*

Comme mentionné dans l'exercice 4, dire « φ est dérivable sur $[0\ ;\ \pi]$ et φ' est continue sur $[0\ ;\ \pi]$ » revient à dire : « φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\ ;\ \pi]$ »

Quelques résultats admis ou rappelés, et un énoncé somme toute assez court. En cas de blocage, essayez de jouer avec les hypothèses à votre disposition : quelle(s) voie(s) permettent-elles de tester ?

Correction de l'exercice 10 :

Si l'on peut être tenté d'appliquer directement l'inégalité triangulaire pour les intégrales à $\int_0^\pi \varphi(t)\sin(xt)\,dt$*, on se rend compte assez vite que cela mène à une impasse :*

Pour tout réel x : $0 \leq \left|\int_0^\pi \varphi(t)\sin(xt)\,dt\right| \leq \int_0^\pi \left|\varphi(t)\sin(xt)\right|\,dt = \int_0^\pi \left|\varphi(t)\right|\left|\sin(xt)\right|\,dt$

Et après ? On peut dire, à la rigueur, que pour tout $t \in [0\ ;\ \pi]$, $|\sin(xt)| \leq 1$*, mais cela donnerait, par croissance de l'intégrale :* $\int_0^\pi \left|\varphi(t)\right|\left|\sin(xt)\right|\,dt \leq \int_0^\pi \left|\varphi(t)\right|\,dt$

Nous obtiendrions donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq \left|\int_0^\pi \varphi(t)\sin(xt)\,dt\right| \leq \int_0^\pi \left|\varphi(t)\right|\,dt$

Nous voudrions montrer que, lorsque x tend vers $+\infty$*, la quantité du milieu tend vers* 0 *(tendre vers* 0 *et tendre vers* 0 *en valeur absolue, c'est la même chose). Mais l'intégrale de droite, qui est une constante (pas de x dans l'expression, le t étant juste la variable d'intégration), n'a aucune raison de valoir* 0*. Cela ne nous permet donc pas de conclure quant à la limite que nous voudrions déterminer.*

Que faire d'autre, alors ? Peut-être jouer un autre coup sur l'intégrale $\int_0^\pi \varphi(t)\sin(xt)\,dt$*, permis par les hypothèses de l'énoncé, avant de jouer de l'inégalité triangulaire. « Permis par les hypothèses de l'énoncé » ? Cette fonction* φ *dérivable sur* $[0\ ;\ \pi]$*, avec* φ' *continue sur* $[0\ ;\ \pi]$*... IPP, peut-être ?*

Soit $x > 0$.
Soient u et v définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u(t) = \varphi(t)$ et $v(t) = -\frac{1}{x} \times \cos(xt)$.
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et leurs dérivées u' et v' définies par $u'(t) = \varphi'(t)$ et $v'(t) = \sin(xt)$, sont continues sur $[0\ ;\ \pi]$.

On dérive φ *(appelée inutilement u pour coller à l'habitude majoritaire de nommer* u, v *les fonctions du produit sous l'intégrale) et on primitive* $t \mapsto \sin(xt)$*. Rappelons qu'en termes d'intégration, x est ici une constante. En primitivant* $t \mapsto \sin(xt)$*, du* $\frac{1}{x}$ *apparaît en facteur, d'où l'importance d'avoir pris x non nul dès le départ. Tant qu'à faire, je l'ai pris strictement positif et ce n'est pas dérangeant, puisqu'on nous demande la limite de l'intégrale lorsque x tend vers* $+\infty$*.*
D'ailleurs, pour cette limite qui doit valoir 0*, ce* $\frac{1}{x}$ *est de très bon augure...*

Une intégration par parties fournit :

$$\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = \Big[\varphi(t)\times\big(-\frac{1}{x}\big)\cos(xt)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \varphi'(t)\times(-\frac{1}{x})\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{x}\big(\varphi(\pi)\cos(x\pi) - \varphi(0)\cos(0)\big) + \frac{1}{x}\int_0^{\pi} \varphi'(t)\times\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{x}\Big(\varphi(0) - \varphi(\pi)\cos(x\pi)\Big) + \frac{1}{x}\int_0^{\pi} \varphi'(t)\times\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

Ok, que faire de ces horreurs ? Comment établir que cette quantité tend vers 0 *lorsque x tend vers $+\infty$? Il est peut-être temps de passer à la valeur absolue...*

Donc : $\left|\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\frac{1}{x}\Big(\varphi(0) - \varphi(\pi)\cos(x\pi)\Big) + \frac{1}{x}\int_0^{\pi} \varphi'(t)\times\cos(xt)\,\mathrm{d}t\right|$

D'après l'inégalité triangulaire : (*la « classique »* $|a+b| \leq |a| + |b|$)

$$\left|\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left|\frac{1}{x}\Big(\varphi(0) - \varphi(\pi)\cos(x\pi)\Big)\right| + \left|\frac{1}{x}\int_0^{\pi} \varphi'(t)\times\cos(xt)\,\mathrm{d}t\right|$$

Autrement dit (puisque $x > 0$) : (*en utilisant* $|a \times b| = |a| \times |b|$)

$$\left|\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{x}\left|\Big(\varphi(0) - \varphi(\pi)\cos(x\pi)\Big)\right| + \frac{1}{x}\left|\int_0^{\pi} \varphi'(t)\times\cos(xt)\,\mathrm{d}t\right| \quad (1)$$

D'une part, l'inégalité triangulaire donne : $\frac{1}{x}\left|\Big(\varphi(0)-\varphi(\pi)\cos(x\pi)\Big)\right| \leq \frac{1}{x}\Big(|\varphi(0)|+|\varphi(\pi)\cos(x\pi)|\Big)$

Revenez à cette remarque de l'exercice 7 *si vous ne comprenez pas pourquoi le signe − dans le membre de gauche laisse place à un + dans le membre de droite.*

D'où : $\frac{1}{x}\left|\Big(\varphi(0) - \varphi(\pi)\cos(x\pi)\Big)\right| \leq \frac{1}{x}\Big(|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)||\cos(x\pi)|\Big) \leq \frac{1}{x}\Big(|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)|\Big)$ (*)

En effet, pour tout réel y, $|\cos(y)| \leq 1$ *et en particulier :* $|\cos(x\pi)| \leq 1$

D'autre part, d'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales :
les bornes étant bien dans le sens croissant : $0 \leq \pi$, *et la fonction* $t \mapsto \varphi'(t)\cos(xt)$ *étant bien continue sur* $[0\,;\,\pi]$ *(par composée et produit de fonctions continues)*

$$\frac{1}{x}\left|\int_0^{\pi} \varphi'(t)\times\cos(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{x}\int_0^{\pi} |\varphi'(t)\times\cos(xt)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{\pi} |\varphi'(t)|\times|\cos(xt)|\,\mathrm{d}t$$

Et, par croissance de l'intégrale ($0 \leq \pi$) : $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{\pi} |\varphi'(t)| \times \left|\cos(xt)\right| \, \mathrm{d}t \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{\pi} |\varphi'(t)| \times 1 \, \mathrm{d}t$

Donc : $\dfrac{1}{x}\left|\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi'(t) \times \cos(xt) \, \mathrm{d}t\right| \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{\pi} \left|\varphi'(t)\right| \, \mathrm{d}t$ (**)

En sommant (*) et (**), nous obtenons :

$$\frac{1}{x}\left|\Big(\varphi(0) - \varphi(\pi)\cos(x\pi)\Big)\right| + \frac{1}{x}\left|\int_0^{\pi} \varphi'(t) \times \cos(xt) \, \mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{x}\Big(\left|\varphi(0)\right| + \left|\varphi(\pi)\right|\Big) + \frac{1}{x}\int_0^{\pi} \left|\varphi'(t)\right| \, \mathrm{d}t$$

En combinant cette inégalité avec (1), nous avons en fait établi :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \left|\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt) \, \mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{x}\Big(\left|\varphi(0)\right| + \left|\varphi(\pi)\right|\Big) + \frac{1}{x}\int_0^{\pi} \left|\varphi'(t)\right| \, \mathrm{d}t$$

Le « $0 \leq$ » ne doit pas vous étonner, une valeur absolue étant toujours positive ou nulle. Devinez-vous la prochaine manœuvre ?

Or, par produits et somme de limites : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\Big(\left|\varphi(0)\right| + \left|\varphi(\pi)\right|\Big) + \frac{1}{x}\int_0^{\pi} \left|\varphi'(t)\right| \, \mathrm{d}t = 0$

La plupart des élèves n'auront pas de mal à voir que $\varphi(0)$ et $\varphi(\pi)$ sont de simples constantes. Mais une part non négligeable aura du mal à attribuer ce qualificatif à $\displaystyle\int_0^{\pi} \left|\varphi'(t)\right| dt$, alors qu'il lui convient parfaitement aussi.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \left|\varphi'(t)\right| dt$ est un simple réel, t n'est qu'une variable « muette » d'intégration.

Le théorème des gendarmes nous permet enfin de conclure : $\boxed{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt) \, \mathrm{d}t = 0}$

Ce résultat est connu sous le nom de lemme de Riemann-Lebesgue. Plus précisément, nous en avons démontré un cas particulier. Il reste en fait valable dans des cas plus généraux, notamment lorsque l'intégrale porte sur un segment quelconque, même lorsque la fonction φ est uniquement supposée continue (donc pas forcément de classe $\mathscr{C}^1$) sur ce segment.

Exercice 11

Sagesse cristalline et pourtant peu prisée :
connaître une racine aide à factoriser.

Énoncé : (temps conseillé : 35 min) (**) *d'après CCP 2008 MP Maths 1*

Soit une suite (B_n) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les propriétés suivantes :

- B_0 est le polynôme constant égal à 1.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ B'_{n+1} = (n+1)B_n$ Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x)$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$

On appelle une telle suite la suite des polynômes de Bernoulli.
Et, pour tout entier naturel n, on pose $b_n = B_n(0)$. b_n est appelé n-ième nombre de Bernoulli.

1) Déterminer B_1 et B_2. En déduire b_1 et b_2.

2) Calculer, pour $n \geq 2$, $B_n(1) - b_n$.

3) Démontrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un polynôme Q_n tel que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ B_n(x) = x(x-1)Q_n(x) + b_n$

Remarques sur l'énoncé :

$\mathbb{R}[X]$ n'est autre que l'ensemble des polynômes à coefficients réels et d'indéterminée X. Tout polynôme P donné de $\mathbb{R}[X]$ sera identifié à la fonction polynomiale associée.
Autrement dit, par exemple, on ne s'embêtera pas à faire la distinction entre l'objet $X^2 + 5X - 3$, *polynôme de* $\mathbb{R}[X]$, *et la fonction polynomiale associée, définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $P(x) = x^2 + 5x - 3$. *Vous ne faites normalement pas la distinction en Terminale. Vous la ferez sur le plan théorique en première année, mais de nombreux exercices, problèmes de concours, annales, vous permettront de ne pas la faire.*

On rappelle que si P est un polynôme (ou une fonction polynomiale), un réel α est dit racine de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Rappelons (ou apprenons) aussi ce résultat qui pourra vous être utile : si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont a est une racine, alors il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - a)Q$. Autrement dit, tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x - a)Q(x)$

Plus généralement : si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont $a_1,\ a_2,...,a_n$ sont n racines distinctes, alors il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - a_1)(X - a_2)...(X - a_n)Q$. Autrement dit, tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n)Q(x)$

Correction de l'exercice 11 :

1) Nous savons : $\forall n \in \mathbb{N},\ B'_{n+1} = (n+1)B_n$. En particulier (pour $n=0$) : $B'_1 = B_0$
Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R},\ B'_1(x) = 1$ (B_0 *étant le polynôme constant égal à* 1)
Nous connaissons la dérivée de B_1, et voulons connaître B_1...

B_1 est une primitive de $B'_1 : x \mapsto 1$ sur $\mathbb{R}$.
Il existe donc un réel C tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ B_1(x) = x + C$
Ne pas oublier la constante C, il n'y a pas de raison a priori qu'elle soit nulle... Mais comment la déterminer ? Nous détenons une autre information sur B_1 :

De plus : $\displaystyle\int_0^1 B_1(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Or : $\displaystyle\int_0^1 B_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t+C\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}+Ct\right]_0^1 = \frac{1^2}{2}+C-0 = \frac{1}{2}+C.$
Donc : $\dfrac{1}{2}+C = 0$ et $C = -\dfrac{1}{2}$.

Enfin, $\boxed{B_1 \text{ est la fonction polynomiale définie sur } \mathbb{R} \text{ par } B_1(x) = x - \frac{1}{2}}$

De même : $B'_2 = 2B_1$. Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R},\ B'_2(x) = 2x-1$.
B_2 est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 2x-1$. Il existe donc un réel D tel que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ B_2(x) = x^2 - x + D$
De plus : $\displaystyle\int_0^1 B_2(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Or : $\displaystyle\int_0^1 B_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t^2-t+D\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + Dt\right]_0^1$
$= \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + D = \dfrac{2}{6} - \dfrac{3}{6} + D = -\dfrac{1}{6} + D$. D'où : $D = \dfrac{1}{6}$.

$\boxed{B_2 \text{ est donc la fonction polynomiale définie sur } \mathbb{R} \text{ par } B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}}$

Pour finir, nous obtenons aisément : $\boxed{b_1 = B_1(0) = -\frac{1}{2} \text{ et } b_2 = B_2(0) = \frac{1}{6}}$

2) Pour tout $n \geq 2$, $B_n(1) - b_n = B_n(1) - B_n(0)$.
Fort bien, et alors ? Et alors, voir ce qui suit requérait un brin d'imagination :

$B_n(1) - B_n(0) = \left[B_n(t)\right]_0^1 = \displaystyle\int_0^1 B'_n(t)\,\mathrm{d}t$ (*B_n étant trivialement une primitive de B'_n sur* $\mathbb{R}$)

Or : $B'_n = B'_{(n-1)+1}$ avec $n-1 \in \mathbb{N}$ (car $n \geq 2$). En utilisant l'hypothèse de l'énoncé (*en l'utilisant sur $n-1$ au lieu de n*), nous obtenons : $B'_n = nB_{n-1}$

Donc : $\int_0^1 B_n'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 nB_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t = n\int_0^1 B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$

Sommes-nous censés savoir calculer cette intégrale ? Eh bien, mieux que ça, nous connaissons immédiatement sa valeur...

$n \geq 2$ donc $n-1 \geq 1$. Autrement dit : $n-1 \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse de l'énoncé, nous savons donc : $\int_0^1 B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$. D'où : $n\int_0^1 B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$, et enfin : $B_n(1) - B_n(0) = 0$

Nous avons établi : $\boxed{\forall n \geq 2,\ B_n(1) - b_n = 0}$

3) *Formulé autrement, on nous demande de démontrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un polynôme Q_n tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $B_n(x) - b_n = x(x-1)Q_n(x)$. Sacrée reformulation ! On a juste passé b_n de l'autre côté. Mais ce genre de manipulation nous permet parfois d'y voir plus clair...*

Soit $n \geq 2$. La fonction $P_n : x \mapsto B_n(x) - b_n$ est une fonction polynomiale. En effet, B_n est une fonction polynomiale, et b_n est une constante.
D'après 2), $P_n(1) = 0$. Autrement dit, 1 est une racine de P_n.

Cool ! On voit comment (cf résultat rappelé dans les remarques sur l'énoncé) du $(x-1)$ va apparaître en facteur. Mais, au vu du résultat demandé, il nous faut aussi du x en facteur. Ce serait sympa que 0 soit racine de P_n...

De plus, $P_n(0) = B_n(0) - b_n = b_n - b_n = 0$. Donc 0 est aussi racine de P_n.

Nous pouvons en conclure qu'il existe un polynôme Q_n tel que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = (x-0)(x-1)Q_n(x)$. Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R},\ B_n(x) - b_n = x(x-1)Q_n(x)$

Nous avons bien montré que pour tout $n \geq 2$, il existe un polynôme Q_n tel que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ B_n(x) = x(x-1)Q_n(x) + b_n$

Exercice 12

Suffoquez-vous l'été ? Ces polynômes-ci
sauront le tempérer, vous venant de Russie.

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure 20 min) (***) *d'après Centrale 2014 MP Maths 2*

Commençons par présenter le principe de raisonnement par récurrence double, que l'on pourra être amené à utiliser. Pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n est vraie, la récurrence simple se faisait ainsi :
Initialisation : On montre que P_0 est vraie.
Hérédité : On montre que si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.
Conclusion : Cela nous permet de conclure que pour tout entier naturel n, P_n est vraie.

Le principe de raisonnement par récurrence double est légèrement différent :
Initialisation : On montre que P_0 et P_1 sont vraies.
Hérédité : On montre que si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, P_n et P_{n+1} sont vraies, alors P_{n+2} aussi est vraie.
Conclusion : Cela nous permet de conclure que pour tout entier naturel n, P_n est vraie.

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n à coefficients réels vérifiant : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
Ces polynômes T_n sont appelés polynômes de Tchebychev de première espèce.

1) Déterminer T_0, T_1, T_2 et T_3

2) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$

3) Déterminer, pour tout entier naturel n, le degré de T_n.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On admet que tout polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes. Déterminer les racines de T_n.

5) On définit les polynômes U_n de Tchebychev de deuxième espèce par :
$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \dfrac{1}{n+1} T'_{n+1}$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z},\ U_n\big(\cos\theta\big) = \dfrac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta}$

Remarques sur l'énoncé :

De même que pour l'exercice 11, on pourra identifier n'importe quel polynôme P à la fonction polynomiale associée.
Autrement dit, par exemple, on ne s'embêtera pas à faire la distinction entre l'objet X^2+5X-3*, polynôme de* $\mathbb{R}[X]$*, et la fonction polynomiale associée, définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $P(x)=x^2+5x-3$*. Vous ne faites normalement pas la distinction en Terminale. Vous la ferez sur le plan théorique en première année, mais de nombreux exercices, problèmes de concours annales, vous permettront de ne pas la faire.*

L'énoncé de la question 2 revient à demander de démontrer que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$

Si vous avez besoin de vous rafraîchir la mémoire sur les notions de degré, de terme de plus haut degré, et les règles de calcul de degrés (degré d'un produit ou d'une somme de deux polynômes), n'hésitez pas à revoir les remarques sur l'énoncé de l'exercice 2.

On pourra, au besoin, utiliser le résultat suivant : un polynôme P admet une infinité de racines si et seulement si c'est le polynôme nul.

Revenons enfin sur une notation introduite en question 4), à savoir $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$.
$\pi\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des multiples de π, autrement dit l'ensemble $\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
$\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ (lire « $\mathbb{R}$ privé de $\pi\mathbb{Z}$ ») désigne l'ensemble des réels qui ne sont pas dans l'ensemble $\pi\mathbb{Z}$. Autrement dit, $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ est l'ensemble des réels qui ne sont pas des multiples de π.

Correction de l'exercice 12 :

1) Par définition de T_0, nous avons : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_0(\cos\theta) = \cos(0 \times \theta) = \cos(0) = 1$

Ne négligeons pas le cadeau que nous fait l'énoncé en nous permettant d'admettre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence et l'unicité de T_n. En conséquence, si pour un entier naturel n donné, nous trouvons un polynôme P qui vérifie : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ P(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, nous pourrons immédiatement en conclure que $T_n = P$. C'est, plus précisément, de l'unicité de T_n dont nous nous servons ici.

Remarquons que le polynôme P_0 constant égal à 1 vérifie bien : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ P_0(\cos\theta) = \cos(0 \times \theta)$. L'unicité de T_0 nous permet de conclure que T_0 n'est autre que ce polynôme. Donc $\boxed{T_0 = 1.}$

Attention, cette égalité est à comprendre au sens polynomial : le 1 du membre de droite est le polynôme constant égal à 1. Cette égalité revient à dire : $\forall x \in \mathbb{R},\ T_0(x) = 1$. Et pour le coup, dans la dernière égalité, 1 désigne bien le réel 1.

Si l'énoncé ne nous avait pas parlé de l'unicité de chaque T_n (et donc en particulier de T_0), aurions-nous pu, à partir de : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_0(\cos\theta) = 1$, déduire : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_0(\cos\theta) = 1$? Oui, avec un raisonnement assez compliqué à produire au sortir de la Terminale, même s'il part d'une idée relativement intuitive : une fonction polynomiale T_0 qui vérifierait : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_0(\cos\theta) = 1$ renverrait 1 comme image une infinité de fois. Cela lui imposerait d'être constante égale à 1. Attention, cela vient du fait c'est une fonction polynomiale. Des fonctions comme sinus ou cosinus renvoient 1 une infinité de fois sans évidemment être constantes égales à 1.

Reprenons notre raisonnement alternatif : pour θ parcourant l'ensemble des réels, $\cos(\theta)$ prend toutes les valeurs du segment $\left[-1;1\right]$ (le théorème des valeurs intermédiaires peut être utile si l'on nous demande de justifier ce dernier point). Nous obtenons donc : $\forall x \in \left[-1;1\right],\ T_0(x) = 1$, c'est-à-dire : $\forall x \in \left[-1;1\right],\ T_0(x) - 1 = 0$
Le polynôme $T_0 - 1$ admet donc tous les réels de $\left[-1;1\right]$ comme racines. Ça en fait un sacré paquet... $T_0 - 1$ admet une infinité de racines, et c'est donc le polynôme nul. Autrement dit, T_0 est le polynôme constant égal à 1. Ouf ! Vous conviendrez tout de même qu'il valait mieux se servir de l'unicité de T_0 admise par l'énoncé...

Par définition de T_1, nous avons : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_1(\cos\theta) = \cos(\theta)$. Remarquons que le polynôme $P_1 = X$ convient. L'unicité de T_1 nous permet de conclure que $\boxed{T_1 = X.}$

Par définition de T_2, nous avons : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_2(\cos\theta) = \cos(2\theta)$.
Ce serait bien de pouvoir exprimer $\cos(2\theta)$ *en fonction de* $\cos(\theta)$ *et nous en sortir comme précédemment. J'espère que vous avez vo formules de trigonométrie bien en tête...*

Pour tout réel θ, $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$
C'est juste un cas particulier de $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$*, avec a et b égaux.*
Donc $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \left(1 - \cos^2(\theta)\right) = 2\cos^2(\theta) - 1$
Remarquons alors que le polynôme $P_2 = 2X^2 - 1$ vérifie bien : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ P_2(\cos\theta) = \cos(2\theta)$
L'unicité de T_2 nous permet de conclure que $\boxed{T_2 = 2X^2 - 1.}$

Par définition de T_3, nous avons : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_3(\cos\theta) = \cos(3\theta)$.
Oulala, nous n'avons pas de formule de trigonométrie pour $\cos(3\theta)$*. Certes, mais cela ne nous dispense pas d'un effort d'adaptation.*
Pour tout réel θ, $\cos(3\theta) = \cos(2\theta + \theta) = \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta)$
$= \left(2\cos^2(\theta) - 1\right)\cos(\theta) - 2\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\theta) = \left(2\cos^2(\theta) - 1\right)\cos(\theta) - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta)$

$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ *est juste un cas particulier de* $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$*, avec a et b égaux.*

Donc : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(3\theta) = 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2\left(1 - \cos^2(\theta)\right)\cos(\theta)$
$= 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2\cos(\theta) + 2\cos^3(\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$
Remarquons que le polynôme $P_3 = 4X^3 - 3X$ vérifie bien : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ P_3(\cos\theta) = \cos(3\theta)$
L'unicité de T_3 nous permet de conclure que $\boxed{T_3 = 4X^3 - 3X.}$

2) Pour tout entier naturel n, pour tout réel θ, $T_{n+2}(cos\theta) = cos\left((n+2)\theta\right)$.
Et $cos\left((n+2)\theta\right) = \cos(n\theta + 2\theta) = \cos(n\theta)\cos(2\theta) - \sin(n\theta)\sin(2\theta)$
$= T_n(\cos\theta)\left(2\cos^2(\theta) - 1\right) - \sin(n\theta) \times 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ (*)

Moi qui voudrais exprimer tout ça en fonction de $\cos(\theta)$*, ce* $\sin(n\theta)\sin(\theta)$ *me fait peur... N'y a-t-il pas une formule - avec uniquement des cosinus par ailleurs - dans laquelle il interviendrait ?*

Or, $\cos\big((n+1)\theta\big) = \cos(n\theta+\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)$.
Autrement dit : $\sin(n\theta)\sin(\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \cos\big((n+1)\theta\big)$

Il s'ensuit donc, d'après (*) :
$cos\big((n+2)\theta\big) = T_n(\cos\theta)\big(2\cos^2(\theta)-1\big) - \times 2\left[\cos(n\theta)\cos(\theta) - \cos\big((n+1)\theta\big)\right]\cos(\theta)$
$= 2\cos^2(\theta)T_n(\cos\theta) - T_n(\cos\theta) - 2\cos^2(\theta)\cos(n\theta) + 2\cos(\theta)\cos\big((n+1)\theta\big)$
$= 2\cos^2(\theta)T_n(\cos\theta) - T_n(\cos\theta) - 2\cos^2(\theta)T_n(\cos\theta) + 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos\theta)$

Enfin : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R} : cos\big((n+2)\theta\big) = 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta)$

Soit P_{n+2} le polynôme défini par : $P_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$
Autrement dit, tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$
Pour tout réel θ, $P_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta) = \cos\big((n+2)\theta\big)$
L'unicité de T_{n+2}, polynôme vérifiant justement : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_{n+2}(\cos\theta) = \cos\big((n+2)\theta\big)$, nous permet de conclure que $T_{n+2} = P_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

Nous avons bien établi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n}$

3) *La question 1 nous a fait calculer T_0, T_1, T_2 et T_3. Jetons un oeil à leurs degrés et coefficients dominants respectifs, histoire de se donner une idée (juste une idée...) d'un résultat plus général.*
$T_0 = 1$ donc son degré est 0. $T_1 = X$ donc son degré est 1.
$T_2 = 2X^2 - 1$ donc son degré est 2. $T_3 = 4X^3 - 3X$ donc son degré est 3.

Il semble que pour tout entier naturel n, le degré de T_n soit n, Mais ce n'est qu'une conjecture à ce stade. Comment la démontrer ? Par récurrence, puisque nous disposons d'une relation de récurrence sur les polynômes T_n. Plus précisément, par récurrence double, puisque la relation dont nous disposons (celle établie à la question précédente) définit le polynôme d'un rang donné (en l'occurrence T_{n+2}) en fonction des deux précédents (T_{n+1} et T_n).

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n : « T_n est de degré n »
Montrons par récurrence double que pour tout entier naturel n, P_n est vraie.

Initialisation : $T_0 = 1$, son degré est 0 donc P_0 est vraie.

$T_1 = X$, son degré est 1 donc P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, P_n et P_{n+1} sont vraies, et montrons que P_{n+2} aussi est vraie.
Supposons donc que T_n est de degré n et que T_{n+1} est de degré $n+1$.
On sait aussi : $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. $2X$ est de degré 1 et T_{n+1} est de degré $n+1$. Donc $2XT_{n+1}$ est de degré $n+1+1 = n+2$. Et T_n est de degré n.
Puisque $n+2 > n$, en faisant la somme - ou la différence - d'un premier polynôme de degré $n+2$ et d'un second polynôme de degré n, on obtient un polynôme de degré $n+2$.
Donc T_{n+2} est de degré $n+2$, et P_{n+2} est vraie.

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence double nous permet de conclure que pour tout entier naturel n, P_n est vraie.
Autrement dit, pour tout entier naturel n, T_n est de degré n.

4) *Pour tout entier naturel n non nul, T_n est de degré n. Donc, d'après ce que l'on nous fait admettre, T_n admet au maximum n racines. Et on nous demande de déterminer les racines de T_n. Comment faire ? Si nous en trouvons exactement n « par chance », nous pourrons en conclure qu'il n'y en a pas d'autre, et nous aurons répondu à la question. Mais comment ça, « par chance » ? Nous n'avons même pas l'expression de T_n... Revenons donc à la définition de T_n, et voyons ce qu'elle peut nous révéler.*

Pour tout entier naturel non nul n, pour tout réel θ, $T_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$.

Et si on cherchait les valeurs de θ pour lesquelles $\cos(n\theta) = 0$?

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(n\theta) = 0$, d'inconnue θ. *n est ici fixé.*

$$\forall \theta \in \mathbb{R} : \quad \cos(n\theta) = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\ n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

Cela nous fait un beau paquet de θ (une infinité...). Mais attention, lorsque $\cos(n\theta) = 0$, c'est-à-dire lorsque $T_n(\cos\theta) = 0$ c'est $\cos(\theta)$ qui est racine de T_n, et non θ... Les θ vérifiant $\cos(n\theta) = 0$ ont beau être une infinité, par périodicité, leurs cosinus vont se répéter.

De quoi avons-nous besoin au juste ? Si, parmi cette infinité de θ solutions de $\cos(n\theta) = 0$, *nous pouvions en déterminer n tels que leurs cosinus soient deux à deux distincts, nous tiendrions alors exactement n racines de T_n, ce qui nous permettrait de conclure.*

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, posons : $\theta_k = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n} = \dfrac{\pi + 2k\pi}{2n} = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$

Comment faire en sorte de choisir n parmi ces θ_k tels que les $\cos(\theta_k)$ *soient deux à deux distincts ? Si on pouvait les prendre dans un intervalle sur lequel la fonction* cos *serait strictement monotone (strictement croissante ou strictement décroissante), cela garantirait que* cos *ne peut pas prendre plusieurs fois la même valeur sur cet intervalle...*

Pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$: $0 \leq k \leq n-1$ donc $0 \leq 2k \leq 2n-2$ puis $1 \leq 2k+1 \leq 2n-1$

Et enfin (en multipliant par $\dfrac{\pi}{2n} > 0$) : $\dfrac{\pi}{2n} \leq \dfrac{(2k+1)\pi}{2n} \leq \dfrac{2n-1}{2n} \times \pi$

La notation $[\![0;n-1]\!]$ *(intervalle fermé avec une double barre) désigne juste l'ensemble des entiers compris au sens large entre* 0 *et* $n-1$. *L'ensemble* $[\![0;n-1]\!]$ *est donc l'ensemble* $\{0,1,...,n-1\}$ (*notation moins formelle à cause des trois petits points*)

Pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, θ_k est donc un réel de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2n} \,;\, \dfrac{2n-1}{2n} \times \pi\right]$, qui lui-même est inclus dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, puisque : $0 \leq \dfrac{\pi}{2n} \leq \dfrac{2n-1}{2n} \times \pi \leq \dfrac{2n}{2n} \times \pi = \pi$

Les θ_k sont des réels deux à deux distincts : pour le justifier, remarquons simplement que la suite (θ_k) est strictement croissante.
Rappelons encore une fois que nous travaillons à n fixé : c'est k qui « bouge »

L'ensemble des θ_k pour k allant de 0 à $n-1$ est donc un ensemble constitué de n réels deux à deux distincts de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
Ils sont bien au nombre de n : en comptant de 0 *à* $n-1$ *inclus, on compte n nombres* (*ne pas oublier* 0)

Or, la fonction cosinus est strictement décroissante - *donc injective, direz-vous l'an prochain* - sur cet intervalle $[0\,;\,\pi]$. Les $\cos(\theta_k)$ pour k allant de 0 à $n-1$ sont donc n réels deux à deux distincts.

Autrement dit, l'ensemble $\left\{\cos(\theta_k),\ k \in [\![0;n-1]\!]\right\}$ contient exactement n éléments.

Tous les éléments de cet ensemble sont des racines de T_n. Or, T_n, qui est de degré n, ne peut avoir plus de n racines, et donc ne peut en avoir d'autres.
En conclusion, l'ensemble des racines de T_n est $\left\{\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),\ k \in [\![0;n-1]\!]\right\}$

5) Par définition des U_n, nous avons : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ U_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x)$

En particulier (puisque l'égalité précédente est valable pour tout réel x) :
$\forall \theta \in \mathbb{R},\ U_n(\cos\theta) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(\cos\theta)$

Nous connaissons l'expression de $T_{n+1}(\cos\theta)$, mais pas de bêtise ! Hors de question de prétendre obtenir immédiatement celle de $T'_{n+1}(\cos\theta)$ en dérivant vaguement (par rapport à quelle variable, d'ailleurs ?). Il ne s'agit pas non plus de nous interdire de dériver rigoureusement une expression bien choisie...

Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(\theta) = T_{n+1}(\cos\theta)$
f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (en l'occurrence, la fonction cosinus, et la fonction T_{n+1}, polynomiale)
Pour tout réel θ, $f'_n(\theta) = -\sin(\theta) T'_{n+1}(\cos\theta)$.
Par ailleurs, nous savons : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ f_n(\theta) = \cos\big((n+1)\theta\big)$. Donc : $f'_n(\theta) = -(n+1)\sin\big((n+1)\theta\big)$.
Nous obtenons donc l'égalité suivante : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ -\sin(\theta) T'_{n+1}(\cos\theta) = -(n+1)\sin\big((n+1)\theta\big)$.
Ou encore : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin(\theta) T'_{n+1}(\cos\theta) = (n+1)\sin\big((n+1)\theta\big)$

Bon, j'aimerais bien ne pas me contenter de cette simplification timide par -1, et diviser des deux côtés par $\sin(\theta)$. Encore faut-il qu'il soit non nul... C'est quoi déjà, cette histoire de $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$? N'est-ce pas justement un ensemble sur lequel la fonction sinus ne s'annule pas ?

Pour tout réel θ : $\sin(\theta) = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = k\pi \iff \theta \in \pi\mathbb{Z}$
Nous savons donc : $\forall\ \theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z},\ \sin(\theta) \neq 0$, d'où : $T'_{n+1}(\cos\theta) = (n+1)\frac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin(\theta)}$

Puis : $U_n(\cos\theta) = \frac{1}{n+1} \times (n+1)\frac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin(\theta)}$

Nous avons bien montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z},\ U_n\big(\cos\theta\big) = \frac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta}}$

Exercice 13

Qui ferait comme lui, tout le monde ou personne ?
Court-circuitant l'ennui, à sa place je sonne.

Énoncé : (temps conseillé : 40 min) (***) *d'après CCINP 2022 MP Maths 1*

M. Toutlemonde habite dans un immeuble dont la porte d'entrée est sécurisée par un code à 4 chiffres. Chacun de ces chiffres est compris entre 0 et 9. Malheureusement, il se trouve devant cette porte et il en a oublié le code.

1) En essayant un code au hasard, quelle est la probabilité de tomber sur le bon code ?

2) M. Toutlemonde décide de trouver le bon code en procédant de la manière suivante : il essaye un code au hasard choisi parmi les codes non encore testés, jusqu'à tomber sur le bon code. On note X la variable aléatoire égale au nombre de codes testés jusqu'à obtenir le bon code. On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que X peut prendre, et on note n le cardinal de cet ensemble..
a) Justifier que pour tout k appartenant à $X(\Omega)$, $P(X=k)=P(X>k-1)-P(X>k)$ et que : $P\big(X=k\big)=P\big([X=k]\bigcap[X>k-1]\big)$
b) Démoontrer que pour tout k appartenant à $X(\Omega)$, $P(X>k-1)=\dfrac{n-(k-1)}{n}$
c) Démontrer que X suit la loi uniforme sur $X(\Omega)$ et donner son espérance.

Remarques sur l'énoncé :

Rappelons que le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments de cet ensemble.

Rappelons aussi que si E est un ensemble fini (non vide), une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur E si et seulement si :
$X(\Omega)=E$ et $\forall x\in E,\ P(X=x)=\dfrac{1}{\text{card}(E)}$ où card(E) est le nombre d'éléments de E.

Correction de l'exercice 13 :

1) Chaque code possible est une liste de 4 éléments de l'ensemble des chiffres de 0 à 9, ensemble qui comporte 10 éléments. Il y a donc 10^4 codes possibles.
Une autre manière de le voir est que chaque code correspond à exactement un entier de 0 *à* 9999 *(un code du genre* 0013 *correspondrait à l'entier* 13*) : ces entiers sont au nombre de* $9999+1$*, c'est-à-dire* $10\ 000$*. Il y a donc autant de codes possibles.*

M. Toutlemonde essaye un de ces codes au hasard. *Sous-entendu, il choisit un code de manière équiprobable parmi tous les codes possibles.*

$\boxed{\text{La probabilité qu'il tombe sur le bon code est donc } \dfrac{1}{10^4}}$

2) L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X est $[\![1 \ ; \ 10\ 000]\!]$
Autrement dit, l'ensemble des entiers de 1 *à* $10\ 000$*. Le cardinal de cet ensemble est* $n = 10\ 000$*.*

Soit $k \in X(\Omega)$.
Nous voulons exprimer $P(X = k)$ *comme différence de deux probabilités. Comment faire ? Peut-être nous ramener plutôt à une somme de probabilités, somme que nous pourrions faire apparaître sous certaines conditions...*
Montrons que $P(X > k-1) = P(X = k) + P(X > k)$.
L'événement $[X > k-1]$ se réalise si et seulement si M. Toutlemonde ne tombe pas sur le bon code aux $k-1$ premiers essais (cette définition reste valable pour $k = 1$, et dans ce cas $P(X > 1-1) = P(X > 0) = 1$). Autrement dit, l'événement $[X > k-1]$ se réalise si et seulement si M. Toutlemonde tombe sur le bon code exactement au k-ième essai **ou** strictement après le k-ième essai.
Donc : $[X > k-1] = [X = k] \cup [X > k]$. C'est une union de deux événements incompatibles, d'où : $P(X > k-1) = P(X = k) + P(X > k)$.
$\boxed{\text{Nous avons bien montré : } \forall k \in X(\Omega),\ P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)}$

Soit $k \in X(\Omega)$. Remarquons que si l'événement $[X = k]$ se réalise, alors nécessairement, l'événement $[X > k-1]$ aussi. En effet, si pour une réalisation donnée, la valeur prise par X est k, cela implique qu'elle est strictement supérieure à $k-1$. En termes d'inclusion, nous avons donc : $[X = k] \subset [X > k-1]$

L'intersection d'événements $[X=k]\cap[X>k-1]$ est donc égale à $[X=k]$

Être Bordelais et Français, c'est tout simplement être Bordelais.

Donc, $\boxed{\text{pour tout entier } k \text{ appartenant à } X(\Omega),\ P\left(X=k\right)=P\left([X=k]\cap[X>k-1]\right).}$

2)b) *Pourquoi nous avoir fait réécrire $P(X=k)$ de cette manière apparamment plus complexe ?*

$\forall k\in X(\Omega),\ P\left(X=k\right)=P\left([X=k]\cap[X>k-1]\right)=P\left(X>k-1\right)\times P_{\left[X>k-1\right]}\left(X=k\right)$

Pour $k>1$, $P_{\left[X>k-1\right]}\left(X=k\right)$ est la probabilité, sachant que M. Toutlemonde a rentré des mauvais codes aux $k-1$ premiers essais, de tomber sur le bon code au k-ième. S'il a rentré des mauvais codes aux $k-1$ premiers essais, ces $k-1$ mauvais codes ne font plus partie des codes à tester au k-ième essai. Il reste donc $n-(k-1)$ codes à tester au k-ième essai, et la probabilité de tomber sur le bon code parmi ces codes est :

$P_{\left[X>k-1\right]}\left(X=k\right)=\dfrac{1}{n-(k-1)}$

Cette égalité reste valable pour $k=1$:

$P_{\left[X>1-1\right]}\left(X=1\right)=P_{\left[X>0\right]}\left(X=1\right)=P\left(X=1\right)=\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n-(1-1)}$

$[X>0]$ est un événement certain, donc « sachant $[X>0]$ » n'ajoute aucune info.

Donc : $\forall k\in X(\Omega),\ P(X=k)=P(X>k-1)\times\dfrac{1}{n-(k-1)}$

Autrement dit : $\forall k\in X(\Omega),\ P(X>k-1)-P(X>k)=P(X>k-1)\times\dfrac{1}{n-(k-1)}$

Mais où va-t-on comme ça ? Nous sommes bien partis pour avoir une expression de $P(X>k)$ en fonction de $P(X>k-1)$...

Par suite : $\forall k\in X(\Omega),\ P(X>k)=P(X>k-1)-P(X>k-1)\times\dfrac{1}{n-(k-1)}$

Donc : $\forall k\in X(\Omega),\ P(X>k)=P(X>k-1)\times\left(1-\dfrac{1}{n-(k-1)}\right)$ (*)

Que faire d'une telle relation de passage de $P(X>k-1)$ à $P(X>k)$? Pourquoi pas une petite récurrence pour parvenir à nos fins ?

Soit, pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, la propriété Q_k : « $P(X > k-1) = \dfrac{n-(k-1)}{n}$ »
Montrons par récurrence sur k que pour tout $k \in [\![1 ; n]\!], Q_k$ est vraie.

Attention, c'est une récurrence à horizon fini : autrement dit, il s'agit de démontrer qu'une propriété Q_k est vraie jusqu'à un certain rang n (et pas de démontrer que Q_k serait vraie pour tout k appartenant à $\mathbb{N}$, ou $\mathbb{N}^*$ par exemple). Il est probable que vous n'ayez jamais été confronté à ce genre de situation. Mais ça reste une récurrence à peu près classique : il faudra juste faire attention à l'ensemble dans lequel k sera pris à l'étape d'hérédité.

<u>Initialisation</u> pour $k = 0$: $P(X > 1-1) = P(X > 0) = 1$, et $\dfrac{n-(1-1)}{n} = \dfrac{n}{n} = 1$ donc Q_1 est vraie.
<u>Hérédité</u> : Supposons que pour un certain rang $k \in [\![1 ; n-1]\!], Q_k$ soit vraie.
On prend $k \in [\![1 ; n-1]\!]$, de sorte que $k+1$ reste inférieur ou égal à n

On a alors : $P(X > k-1) = \dfrac{n-(k-1)}{n}$. La relation (*) nous permet alors d'écrire :

$$P(X > k) = P(X > k-1) \times \left(1 - \frac{1}{n-(k-1)}\right) = \frac{n-(k-1)}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n-(k-1)}\right)$$

Donc : $P(X > k) = \dfrac{n-(k-1)}{n} \times \dfrac{n-(k-1)-1}{n-(k-1)} = \dfrac{n-k}{n}$. La propriété Q_{k+1} est donc vraie.

<u>Conclusion</u> : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure que pour tout k appartenant à $[\![1 ; n]\!]$, $P(X > k-1) = \dfrac{n-(k-1)}{n}$

Autrement dit : $\boxed{\text{pour tout } k \text{ appartenant à } X(\Omega),\ P(X > k-1) = \dfrac{n-(k-1)}{n}}$

2)c) *Il s'agit enfin de déterminer, pour tout k appartenant à $X(\Omega)$, la probabilité $P(X = k)$*
D'après 2)a) et 2)b) : $\forall k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k) = \dfrac{n-(k-1)}{n} - \dfrac{n-k}{n}$
Donc : $P(X = k) = \dfrac{1}{n}$, où n est le cardinal de $X(\Omega)$.

Enfin, $\boxed{X \text{ suit la loi uniforme sur } X(\Omega), \text{ c'est-à-dire sur } [\![1 ; 10^4]\!]}$

Son espérance est $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k$

On a factorisé par la constante multiplicative $\frac{1}{n}$. Mais comment calculer $\sum_{k=1}^{n} k$?

$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+...+n$. C'est la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique (de raison 1). Le premier terme de la somme est 1 et le dernier est n. Nous savons donc :

$$\sum_{k=1}^{n} k = n \times \frac{1+n}{2} \qquad \textit{(nb de termes)} \times \frac{\textit{premier + dernier terme}}{2}$$

Il s'ensuit que : $E(X) = \frac{1}{n} \times n \times \frac{1+n}{2}$. Enfin, $\boxed{E(X) = \frac{n+1}{2} = 5000,5}$

Avec cette méthode, M. Toutlemonde tombera sur le bon code au bout de 5000,5 essais en moyenne.

Plus généralement, pour a et b entiers tels que $a \leq b$, lorsque X suit la loi uniforme sur $[\![a\ ;\ b]\!]$, $E(X) = \frac{a+b}{2}$

Dans le calcul de $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$, au lieu de sortir le $\frac{1}{n}$ de la somme pour ensuite appliquer la formule de calcul de la somme arithmétique $\sum_{k=1}^{n} k$, nous aurions aussi pu calculer directement $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$ en tant que somme arithmétique (de raison $\frac{1}{n}$).

L'an prochain, vous devrez connaître ces sommes usuelles, dont l'expression est démontrable par récurrence :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Exercice 14

Un résultat tentant, mais il serait dommage
que dénombrer vous rende allergique au comptage.

Énoncé : (temps conseillé : 50 min) (****) *d'après X-ENS 2021 MP Maths A*

Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, on note $a|b$ si et seulement si a divise b.

Si E est un ensemble fini, on note card(E) son cardinal (c'est-à-dire son nombre d'éléments).

Enfin, si p est un nombre premier et $a \in \mathbb{Z}^*$, on note $v_p(a)$ le plus grand entier naturel v tel que p^v divise a

Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit p appartenant à $\mathbb{N}^*$.

1) Démontrer que : $\text{card}\Big(\{k \in [\![1;m]\!],\ \ p|k\}\Big) = \lfloor \frac{m}{p} \rfloor$

2) On suppose désormais que p est premier. Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que : $\forall i > N,\ \lfloor \frac{m}{p^i} \rfloor = 0$

3) En déduire (toujours si p est premier) : $v_p(m!) = \sum_{i=1}^{N} \lfloor \frac{m}{p^i} \rfloor$

Remarques sur l'énoncé :

Pour un nombre premier p et un entier relatif non nul a, $v_p(a)$ est en fait la puissance (éventuellement nulle) à laquelle p figure dans la décomposition en facteurs premiers de a. On l'appelle valuation p-adique de a. Par exemple, que vaut $v_3(63)$? La décomposition en facteurs premiers de 18 est $3^2 \times 7$. Donc $v_3(63) = 2$. Et $v_5(63) = 0$.

Revenez <u>ici</u> si vous estimez utile un rappel sur la partie entière.

Dans la question 1, on nous demande en fait de montrer qu'il y a $\lfloor \frac{m}{p} \rfloor$ multiples de p dans l'ensemble $[\![1;m]\!]$. Nous avons déjà croisé cette notation $[\![1;m]\!]$ précédemment : pour rappel, l'ensemble $[\![1;m]\!]$ est l'ensemble des entiers de 1 à m (1 et m compris).

La question 3 est particulièrement difficile. Une rédaction même peu formelle sera acceptée (par qui, en fait ?). Ce sera le cas de la correction.

Correction de l'exercice 14 :

1) Soit k appartenant à $[\![1;m]\!]$. p divise k si et seulement si k est un multiple de p, autrement dit si et seulement si il existe un entier relatif j tel que $k = jp$

Mais : $1 \leq k \leq m \iff 1 \leq jp \leq m \iff \dfrac{1}{p} \leq j \leq \dfrac{m}{p}$.

j étant un entier, le dernier encadrement est en fait équivalent à : $1 \leq j \leq \lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor$

En effet, le plus petit entier supérieur ou égal à $\dfrac{1}{p}$ *est* 1*, et le plus petite entier inférieur ou égal à* $\dfrac{m}{p}$ *est* $\lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor$ *(par définition de la partie entière).*

Se pose maintenant la question de savoir combien il y a d'entiers entre 1 *et* $\lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor$*. Attention à ne pas oublier le fait que* $\lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor$ *puisse être nul...*

• Si $\lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor = 0$, il n'y a aucun entier j vérifiant $1 \leq j \leq \lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor$. Dans ce cas, l'ensemble $\{k \in [\![1;m]\!],\ \ p|k\}$ est vide, son cardinal est 0, et nous avons donc bien :
$\text{card}\Big(\{k \in [\![1;m]\!],\ \ p|k\}\Big) = \lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor$

• Si $\lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor \neq 0$, $\lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor$ est un entier naturel non nul. Dans ce cas, il y a $\lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor$ entiers j vérifiant $1 \leq j \leq \lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor$. Et $\{k \in [\![1;m]\!],\ \ p|k\} = \Big\{jp,\ j \in \Big[\!\!\Big[1;\lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor\Big]\!\!\Big]\Big\}$

Le dernier ensemble écrit est l'ensemble des jp *avec* j *appartenant à* $\Big[\!\!\Big[1;\lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor\Big]\!\!\Big]$*. Il a le même nombre d'éléments que* $\Big[\!\!\Big[1;\lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor\Big]\!\!\Big]$*, puisque pour deux* j_1 *et* j_2 *distincts appartenant à* $\Big[\!\!\Big[1;\lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor\Big]\!\!\Big]$*,* j_1p *et* j_2p *sont distincts. (Il n'y a pas de risque que deux* j_1 *et* j_2 *différents « donnent » le même* jp*. Je parle d'injectivité sans en parler...)*

Une manière plus simple - mais moins formelle - de voir les choses, en explicitant $\Big\{jp,\ j \in \Big[\!\!\Big[1;\lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor\Big]\!\!\Big]\Big\}$ *:* $\Big\{jp,\ j \in \Big[\!\!\Big[1;\lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor\Big]\!\!\Big]\Big\} = \Big\{p, 2p, 3p, ..., \lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor \times p\Big\}$ contient $\lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor$ éléments.

Donc dans ce cas aussi : $\text{card}\Big(\{k \in [\![1;m]\!],\ \ p|k\}\Big) = \lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor$.

Dans les deux cas, nous avons bien montré : $\boxed{\text{card}\Big(\{k \in [\![1;m]\!],\ \ p|k\}\Big) = \lfloor \dfrac{m}{p} \rfloor}$

2) *Quand la partie entière d'un réel x est-elle nulle ?* $\lfloor x \rfloor = 0$ *si et seulement si le plus*

grand entier relatif inférieur ou égal à x est 0, autrement dit si et seulement si $0 \leq x < 1$.

Montrons qu'il existe un entier naturel N tel que : $\forall i > N,\ 0 \leq \dfrac{m}{p^i} < 1$

Dit comme ça, ça semble plus simple, non ? Qu'advient-il de $\dfrac{m}{p^i}$ lorsque i tend vers $+\infty$?

p étant un nombre premier, nous savons $p \geq 2 > 1$. Donc : $\lim\limits_{i \to +\infty} p^i = +\infty$ et, par quotient de limites : $\lim\limits_{i \to +\infty} \dfrac{m}{p^i} = 0$

Les termes de la suite $\left(\dfrac{m}{p^i}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ peuvent donc être rendus aussi proches de 0 que l'on veut, pourvu que i soit grand.

En particulier, il existe un entier naturel N tel que : $\forall i > N,\ -\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{m}{p^i} \leq \dfrac{1}{2}$
Et comme pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\dfrac{m}{p^i} \geq 0$, nous avons plus précisément : $\forall i > N,\ 0 \leq \dfrac{m}{p^i} \leq \dfrac{1}{2}$

Et donc, a fortiori : $\forall i > N,\ 0 \leq \dfrac{m}{p^i} < 1$

Nous avons bien établi l'existence d'un entier naturel N tel que : $\forall i > N,\ \left\lfloor \dfrac{m}{p^i} \right\rfloor = 0$

Ici, nous nous en sommes sortis « en français », avec cette histoire de « rendus aussi proches de 0 que l'on veut », et c'est tout à fait légitime. Pour une version avec plus de quantificateurs, vous pouvez revenir à la définition de limite (rappelée dans l'exercice 1) :
$\lim\limits_{i \to +\infty} \dfrac{m}{p^i} = 0$. *Donc, par définition :* $\forall \epsilon > 0,\ \exists\, N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall i > N_\epsilon,\ \left|\dfrac{m}{p^i} - 0\right| \leq \epsilon$
Autrement dit : $\forall \epsilon > 0,\ \exists\, N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall i > N_\epsilon,\ -\epsilon \leq \dfrac{m}{p^i} \leq \epsilon$
(Si vous êtes attentif aux détails, vous pourriez me dire : « comment ça, $\forall i > N_\epsilon$? Dans l'exercice 1, vous avez marqué $\forall n \geq N_\epsilon$ » . Ça ne pose en fait aucun souci : ce qui est vrai pour tout n supérieur ou égal à N_ϵ est en particulier vrai pour tout n strictement supérieur à N_ϵ.)
En prenant par exemple $\epsilon = \dfrac{1}{2}$, nous obtenons : $\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall i > N,\ -\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{m}{p^i} \leq \dfrac{1}{2}$
Puis nous pouvons conclure comme plus haut.

3) Dans la question 1), on n'a pas supposé p premier (mais juste que c'est un entier naturel non nul). Le résultat qu'elle fournit est donc valable en remplaçant p par p^i.

Si le résultat de 1) requérait l'hypothèse « p premier », on n'aurait pas pu faire ce remplacement, parce que p^i n'est plus premier pour $i \geq 2$.

Autrement dit, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor \frac{m}{p^i} \rfloor$ est le nombre de multiples de p^i dans $[\![1;m]\!]$.

$m!$ est le produit des entiers de 1 à m (et donc de 2 à m, puisque $m \geq 2$). $v_p(m!)$ est la puissance à laquelle p figure dans la décomposition en facteurs premiers de $m!$. Cette décomposition s'obtient par produit des décompositions en facteurs premiers de tous les entiers de 2 à m... La puissance à laquelle p figure dans cette décomposition est donc la somme des puissances auxquelles p figure dans les décompositions en facteurs premiers de tous les entiers de 2 à m.

Autrement dit : $v_p(m!) = v_p(2) + v_p(3) + ... + v_p(m) = \sum_{k=2}^{m} v_p(k) = \sum_{k=1}^{m} v_p(k)$
(*Peu importe si l'on démarre la somme à $k = 1$ ou $k = 2$, puisque* $v_p(1) = 0$)

Les puissances s'additionnent, tout simplement. Illustrons ce propos avec un exemple :
Pour $p = 2$ et $m = 5$:
- *$k = 2$: la décomposition en facteurs premiers de 2 est 2^1, donc $v_2(2) = 1$*
- *$k = 3$: la décomposition en facteurs premiers de 3 ne comporte pas 2, donc $v_2(3) = 0$*
- *$k = 4$: la décomposition en facteurs premiers de 4 est 2^2, donc $v_2(4) = 2$*
- *$k = 5$: la décomposition en facteurs premiers de 5 ne comporte pas 2, donc $v_2(5) = 0$*

Cela donne $v_2(5!) = 1 + 0 + 2 + 0 = 3$
C'est bien cohérent avec la décomposition en facteurs premiers de $5!$:
$5! = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$

Très bien, mais quel rapport avec la somme $\sum_{i=1}^{N} \lfloor \frac{m}{p^i} \rfloor$? Remarquez que cette somme s'arrête à $i = N$, ce N vérifiant : $\forall i > n$, $\lfloor \frac{m}{p^i} \rfloor = 0$

Remarquons (d'après les questions 1 et 2) que la plus grande puissance i pour laquelle il existe des multiples de p^i entre 1 et m est $i = N$.

• Chaque multiple de p compris entre 1 et m contribue à une puissance d'au moins 1 dans la somme finale qui donnera $v_p(m!)$. D'après la question 1, ces multiples sont au nombre de $\lfloor \frac{m}{p} \rfloor$. Ce nombre $\lfloor \frac{m}{p} \rfloor$ correspond donc à la somme des contributions « mini-

males » de chaque multiple de p entre 1 et m dans $v_p(m!)$.
Pourquoi minimale ? Parce qu'un multiple de p peut être mieux que ça : multiple de p^2, de p^3... C'est tout le défi de cette comptabilisation de contributions, qui va s'affiner au fur et à mesure.

• Chaque multiple de p^2 compris entre 1 et m est aussi un multiple de p. Sa contribution dans $v_p(m!)$, d'une puissance au moins 2, a donc été en partie comptabilisée dans le terme $\lfloor \frac{m}{p} \rfloor$. En ajoutant à ce terme $\lfloor \frac{m}{p} \rfloor$ le terme $\lfloor \frac{m}{p^2} \rfloor$ (qui compte le nombre de multiples de p^2 compris entre 1 et m), on tient compte de la contribution supplémentaire de ces multiples de p^2. A ce stade, la somme $\lfloor \frac{m}{p} \rfloor + \lfloor \frac{m}{p^2} \rfloor$ compte une contribution de 1 pour chaque multiple de p qui n'est pas un multiple de p^2 (1 est donc la contribution exacte de ces multiples), et une contribution de 2 pour chaque multiple de p^2. Mais 2 n'est pas nécessairement la contribution exacte de chaque multiple de p^2, c'est encore une contribution « minimale ».

• Chaque multiple de p^3 compris entre 1 et m est aussi un multiple de p et de p^2. Sa contribution dans $v_p(m!)$, d'une puissance au moins 3, a donc été en partie (deux fois mais pas encore trois fois) comptabilisée dans la somme $\lfloor \frac{m}{p} \rfloor + \lfloor \frac{m}{p^2} \rfloor$. En ajoutant à ce terme $\lfloor \frac{m}{p} \rfloor$ le terme $\lfloor \frac{m}{p^3} \rfloor$ (qui compte le nombre de multiples de p^3 compris entre 1 et m), on complète leur contribution pour arriver à une puissance 3 chacun. Mais 3 n'est pas nécessairement la contribution exacte de chaque multiple de p^3, c'est encore une contribution « minimale ».

...

• En faisant ces additions successives jusqu'au terme $\lfloor \frac{m}{p^N} \rfloor$, on tient enfin compte de la contribution exacte de chaque multiple de p compris entre 1 et m en fonction de la plus grande puissance p^i de p de laquelle il est multiple. On peut s'arrêter à $\lfloor \frac{m}{p^N} \rfloor$ parce que d'après la question 2), il n'y a pas, entre 1 et m de multiples de puissances p^i de p avec $i > n$

Finalement, dans la décomposition en facteurs premiers de $m!$, le nombre premier p figure à une puissance $\lfloor \frac{m}{p} \rfloor + \lfloor \frac{m}{p^2} \rfloor + ... + \lfloor \frac{m}{p^N} \rfloor$. Autrement dit : $\boxed{v_p(m!) = \sum_{i=1}^{N} \lfloor \frac{m}{p^i} \rfloor}$

À cause de la grande difficulté à en rédiger une correction compréhensible pour un élève sortant de la Terminale, j'ai longtemps hésité avant de faire figurer la question 3) dans cet énoncé. Le fait que l'intérêt des questions 1) et 2) réside essentiellement dans ce *résultat m'a finalement décidé.*

J'ai eu l'occasion de soumettre cet exercice à des élèves en khôlle, et il leur a donné bien du fil à retordre... J'aurais accepté de leur part une rédaction peu formelle comme ma correction, même si en première année, on dispose d'outils intéressants sur les sommes pour parvenir au résultat : une combinaison judicieuse de télescopage et de changements d'indice pouvait nous faire parvenir au résultat demandé. Bien que nous ayons déjà croisé ces techniques plus tôt dans le document, c'était à dose (relativement) raisonnable et de manière isolée. Mais dans ce cas précis, le combo risquait d'être assez peu intuitif. Je lui ai donc préféré cette rédaction moins formelle, même si plus fastidieuse...

Une dernière confidence... Le sujet original demandait de montrer : $v_p(m!) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lfloor \frac{m}{p^i} \rfloor$
Il s'agissait donc d'une somme infinie, notion qui, normalement, vous est inconnue, et que je ne pouvais vous faire manipuler sans un bagage un minimum sérieux sur les séries. À moins de reformuler les choses en parlant de $\lim_{N \to +\infty} \sum_{i=1}^{N} \lfloor \frac{m}{p^i} \rfloor$.

J'ai préféré vous faire constater, à l'aide de la question 2 (rajout par rapport à cet énoncé) qu'il existe un rang à partir duquel les termes de la suite $\left(\lfloor \frac{m}{p^i} \rfloor \right)_{i \in \mathbb{N}}$ *sont nuls, ce qui permet de se ramener, à la question 3), au cas d'une somme finie.*

Exercice 15

J'ai croisé à l'instant un élève en errance
qui ne savait comment majorer l'espérance.

Énoncé : temps conseillé : 25 min) (***) *d'après Mines-Ponts 2018 MP Maths 1*

Soit n un entier naturel non nul, et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1;n]\!]$

1) Montrer que pour tout réel α tel que $n \leq \alpha$, $E(X) \leq \alpha$

2) Montrer que pour tout entier naturel non nul m : $E(X) \leq m - 1 + nP(X \geq m)$

Remarques sur l'énoncé :

Pour rappel, la notation $[\![1;n]\!]$, déjà abordée notamment dans les exercices 12 et 14, désigne simplement l'ensemble des entiers k tels que $1 \leq k \leq n$.

A priori, en Terminale, on ne vous embêtait pas trop sur l'existence de l'espérance des variables aléatoires que vous manipuliez. Vous verrez dans le supérieur que toute variable aléatoire n'admet pas forcément une espérance. Mais dans le cas particulier (qui était souvent le vôtre, et qui est celui de cet énoncé) où l'on manipule des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini, l'existence de cette espérance ne pose pas de problème. En particulier, il n'est pas attendu de votre part ici de justifier l'existence de $E(X)$. L'an prochain, dans ce genre de cas simple, vous vous fendrez d'une justification du style « l'ensemble $X(\Omega)$ est fini, donc X admet une espérance ».

Correction de l'exercice 15 :

1) X est à valeurs dans $[\![1;n]\!]$. Par définition de l'espérance : $E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k)$

L'énoncé nous dit juste que X est à valeurs dans $[\![1;n]\!]$. Elle ne prend pas nécessairement toutes ces valeurs. Autrement dit, l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X - ensemble sur lequel il faudrait sommer les $kP(X = k)$ pour obtenir $E(X)$ - est un sous-ensemble de $[\![1;n]\!]$, qui n'est pas nécessairement $[\![1;n]\!]$ tout entier. Mais ce n'est pas gênant de sommer sur tous les k de $[\![1;n]\!]$ comme nous l'avons fait plus haut. En effet, si l'une des valeurs k entre 1 et n n'est pas prise par X, on aura tout simplement $P(X = k) = 0$, et l'espérance n'en sera pas affectée.

Soit un réel α tel que $\alpha \geq n$. Donc : $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $k \leq \alpha$. De plus, $P(X = k) \geq 0$
Une probabilité est un réel compris entre 0 et 1.
Donc : pour tout k appartenant à $[\![1;n]\!]$: $kP(X = k) \leq \alpha P(X = k)$
En sommant ces inégalités pour tous les entiers k de 1 à n, on obtient :
$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha P(X = k)$. Or, $\sum_{k=1}^{n} \alpha P(X = k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} P(X = k)$

La dernière égalité s'obtient par linéarité de la somme - je pense avoir assez fait la promotion de la playlist « Démystifier Σ » dans les exercices précédents - mais dit plus simplement, il s'agit juste de factoriser par α :
$\alpha P(X = 1) + \alpha P(X = 2) + ... + \alpha P(X = n) = \alpha\Big(P(X = 1) + P(X = 2) + ... + P(X = n)\Big)$

Nous avons donc montré : $E(X) \leq \alpha \sum_{k=1}^{n} P(X = k)$.

Or : $\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = 1$. Enfin, $\boxed{\text{pour tout réel } \alpha \text{ tel que } n \leq \alpha, \text{ nous avons bien : } E(X) \leq \alpha}$

2) $E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k)$

Dans le membre de droite de l'inégalité à démontrer, pour faire apparaître une somme aussi, on aurait peut-être envie de dire que le terme $P(X \geq m)$ s'écrit :
$P(X \geq m) = P(X = m) + P(X = m + 1) + ... + P(X = n) = \sum_{k=m}^{n} P(X = k)$

Et c'est une très bonne idée. <u>SI</u> on n'oublie pas de traiter le cas $m > n$, qui ne permet pas une telle écriture. En effet, le fourbe énoncé ne nous précise nullement que m serait inférieur ou égal à n - ce dont vous auriez pu avoir l'impression avec le terme $P(X \geq m)$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

• <u>Si $m > n$</u> : $P(X \geq m) = 0$. En effet, la variable aléatoire X étant à valeurs dans $[\![1;n]\!]$, la probabilité qu'elle prenne une valeur supérieure ou égale à m, donc strictement supérieure à n, est nulle. Dans ce cas, on a donc : $m-1+nP(X \geq m) = m-1$.
Et $m > n$, c'est-à-dire (comme m est entier) $m \geq n+1$. Donc $m-1 \geq n$.
Le résultat de la question 1) nous permet donc d'affirmer : $E(X) \leq m-1$.
Nous avons donc bien : $E(X) \leq m-1+nP(X \geq m)$

• <u>Si $m \leq n$</u> (autrement dit, si $m \in [\![1;n]\!]$) :

- Si $m > 1$, $E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{m-1} kP(X=k) + \sum_{k=m}^{n} kP(X=k)$

C'est quoi, ce sous-cas, encore ? Pourquoi « si m > 1 » ? Nous avons juste séparé la somme $\sum_{k=1}^{n} kP(X=k)$ *en deux, en mettant les termes correspondant aux k entre* 1 *et* $m-1$ *dans le premier paquet, et les termes correspondant aux k entre m et n dans le second paquet. Bon. « Démystifier Σ », te revoilà. Pour plus de détails sur cette séparation, n'hésitez pas à consulter la vidéo <u>« Séparer et recoller des sommes »</u>.*

Cette séparation peut vous faire penser à la relation de Chasles pour les intégrales, mais il serait en général faux d'écrire : $\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{m} kP(X=k) + \sum_{k=m}^{n} kP(X=k)$.
Le terme pour k = m serait présent deux fois. (Je dis faux en général parce que dans la situation où ce terme $mP(X=m)$ *est nul, cette répétition ne serait pas gênante)*

Si m = 1, le premier paquet $\sum_{k=1}^{m-1} kP(X=k)$ *correspondrait aux termes pour k allant de 1... à* $1-1=0$*... Ce paquet serait donc vide. Si on adopte la convention (qui existe, mais que tous vos enseignants n'adopteront pas nécessairement l'an prochain) selon laquelle* $\sum_{k=1}^{0} kP(X=k) = 0$, *alors le cas m = 1 ne pose pas de soucis, et on n'est pas obligé de le distinguer.*

Or : pour tout $k \in [\![m;n]\!]$, $kP(X=k) \leq nP(X=k)$. Donc $\sum_{k=m}^{n} kP(X=k) \leq \sum_{k=m}^{n} nP(X=k)$.

D'où : $\sum_{k=m}^{n} kP(X=k) \leq n \sum_{k=m}^{n} P(X=k)$ *n est une constante*

Autrement dit : $\sum_{k=m}^{n} kP(X=k) \leq nP(X \geq m)$

Maintenant, si on arrive à montrer que $\sum_{k=1}^{m-1} kP(X=k) \leq m-1$*, on aura gagné...*

D'autre part : $\forall k \in [\![1;m-1]\!]$, $k \leq m-1$ et $0 \leq P(X=k)$, donc $kP(X=k) \leq (m-1)P(X=k)$

Puis : $\sum_{k=1}^{m-1} kP(X=k) \leq \sum_{k=1}^{m-1} (m-1)P(X=k) = (m-1)\sum_{k=1}^{m-1} P(X=k)$

Et : $\sum_{k=1}^{m-1} P(X=k) = P(X \leq m-1) \leq 1$. En multipliant par $m-1 \geq 0$, on obtient : $(m-1)\sum_{k=1}^{m-1} P(X=k) \leq m-1$. C'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{m-1} kP(X=k) \leq m-1$

Sommons cette inégalité avec celle obtenue précédemment : $\sum_{k=m}^{n} kP(X=k) \leq nP(X \geq m)$

Nous obtenons : $\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \leq m-1+nP(X \geq m)$

Autrement dit : $E(X) \leq m-1+nP(X \geq m)$

- Si $m=1$: $E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \leq \sum_{k=1}^{n} nP(X=k) = n\sum_{k=1}^{n} P(X=k) = n = nP(X \geq 1)$

On a donc bien : $E(X) \leq 1-1+nP(X \geq 1)$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } m,\ E(X) \leq m-1+nP(X \geq m)}$

Exercice 16

Sous cette franche image et ces si belles dents,
ce complexe à l'air sage a des antécédents.

Énoncé : (temps conseillé : 45 min) (***) *d'après Mines-Ponts 2014 MP Maths 1*

1) Soient r et R des nombres réels strictement positifs, α et θ des nombres réels. On note $\omega = re^{i\alpha}$ et $z = Re^{i\theta}$. Montrer que l'équation $ze^z = \omega$ équivaut au système :

$$\begin{cases} Re^{R\cos(\theta)} = r \\ R\sin(\theta) \ = \alpha - \theta \ \text{ (modulo } 2\pi) \end{cases}$$

On choisit dorénavant le réel α dans l'intervalle $[2\pi, 4\pi[$. Soit alors φ l'application de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$ définie par la formule : $\varphi(\theta) = \dfrac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)} \exp\left((\alpha - \theta)\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

2) Déterminer les limites de $\varphi(\theta)$ lorsque $\theta \to 0^+$ et lorsque $\theta \to \pi^-$. Que peut-on en déduire (en termes de solutions) sur l'équation $\varphi(\theta) = r$ pour $r > 0$ fixé ?

3) Soit $D = \{Re^{i\theta} \ ; \ R > 0 \text{ et } 0 < \theta < \pi\} \cup \{0\}$ et l'application $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(z) = ze^z$. Déduire de ce qui précède que g est surjective. *(cf remarques sur l'énoncé)*

Remarques sur l'énoncé :

Rappelons que dire « $a = b$ (modulo 2π) »revient à dire : « $\exists\, k \in \mathbb{Z}, a = b + 2k\pi$ »

La notation $f : E \longrightarrow F$ pour introduire une application f veut juste dire que cette application f est définie sur E et qu'à tout x appartenant à E, elle lui associe son image $f(x)$ appartenant à F. Cette notation ne précise pas l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Soient E et F deux ensembles. Une application $f : E \mapsto F$ est dite surjective lorsque : $\forall y \in F, \exists\, x \in E, y = f(x)$. Autrement dit, lorsque tout élément y de l'ensemble d'arrivée F admet (au moins) un antécédent x dans l'ensemble de départ E par l'application f.
Pour revenir à la question 3) de l'énoncé : on nous demande de montrer que $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est surjective. Il s'agit en fait de montrer que pour tout y appartenant à $\mathbb{C}$, il existe z appartenant à D tel que $y = g(z)$. Autrement dit, il s'agit de montrer que pour tout y appartenant à $\mathbb{C}$, l'équation $g(z) = y$ d'inconnue z a au moins une solution dans D.

Correction de l'exercice 16 :

1) *ω est donné sous forme exponentielle ($re^{i\alpha}$, avec $r>0$ et α réel). Il serait bon d'avoir ze^z aussi sous forme exponentielle. Mais attention au terme e^z, dont l'exposant z est un nombre complexe, et pas nécessairement un imaginaire pur. L'écriture e^z n'a donc aucune raison d'être une écriture sous forme exponentielle...*

$z = Re^{i\theta} = R\cos(\theta) + iR\sin(\theta)$. Donc $e^z = e^{R\cos(\theta)+iR\sin(\theta)} = e^{R\cos(\theta)} \times e^{iR\sin(\theta)}$
$\left(e^{R\cos(\theta)}\right.$ est un réel strictement positif, et $R\sin(\theta)$ est un réel. $e^{R\cos(\theta)} \times e^{iR\sin(\theta)}$ est donc la forme exponentielle de $\left.e^z\right)$

Puis : $ze^z = Re^{i\theta} \times e^{R\cos(\theta)} \times e^{iR\sin(\theta)} = Re^{R\cos(\theta)} \times e^{i\left(R\sin(\theta)+\theta\right)}$
L'équation $ze^z = \omega$ est donc équivalente à : $Re^{R\cos(\theta)} \times e^{i\left(R\sin(\theta)+\theta\right)} = re^{i\alpha}$.
Les membres de cette égalité sont deux écritures sous forme exponentielle.
$\left(\text{car } Re^{R\cos(\theta)} > 0,\ r > 0, \text{ et } R\sin(\theta)+\theta \text{ et } \alpha \text{ sont deux réels}\right)$

L'équation $ze^z = \omega$ est donc équivalente à :

$$\begin{cases} Re^{R\cos(\theta)} = r \\ R\sin(\theta)+\theta \ = \alpha \ \ (\text{modulo } 2\pi) \end{cases}$$

Rappelons en effet que deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux, et leurs arguments sont égaux à 2π près.

Enfin, l'équation $ze^z = \omega$ équivaut bien au système :

$$\boxed{\begin{cases} Re^{R\cos(\theta)} = r \\ R\sin(\theta) \ = \alpha - \theta \ \ (\text{modulo } 2\pi) \end{cases}}$$

2) *Avant de paniquer, faisons un calcul « simple » de limite. Peut-être y a-t-il, dans cette expression, plus de clémence qu'il n'y paraît (pas de forme indéterminée quoi).*

Par continuité de sin sur $\mathbb{R}$ (et en particulier en 0) : $\lim\limits_{\theta\to 0} \sin(\theta) = \sin(0) = 0$
De plus : $\forall x \in \left]0\ ;\ \pi\right[,\ \sin(x) > 0$ *Là, nous avons indirectement dit :* $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \sin(\theta) = 0^+$
Et : $\lim\limits_{\theta\to 0} \alpha - \theta = \alpha$, avec $\alpha > 0$.
Il ne faut pas être passé à côté de la phrase : « on choisit dorénavant le réel α dans l'intervalle $[2\pi, 4\pi[$ »

Donc, par quotient de limites : $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)} = +\infty$

Le signe de α n'est pas du tout à négliger : si α était strictement négatif, nous aurions obtenu $-\infty$ comme limite. Et si α était nul, nous aurions eu une forme indéterminée. Intéressons-nous maintenant à ce qu'il y a « à l'intérieur » de exp.

Nous avons déjà établi : $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)} = +\infty$. De plus, par continuité de cos sur $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{\theta \to 0} \cos(\theta) = \cos(0) = 1$. D'où, par produit de limites : $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)} \times \cos(\theta) = +\infty$

Oui oui, $\dfrac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)} \times \cos(\theta)$ et $(\alpha - \theta) \times \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$, c'est la même chose.

Et : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. Donc, par composition de limites : $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \exp\left((\alpha - \theta)\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = +\infty$

Enfin, par produit de limites : $\lim\limits_{\theta \to 0^+} = \dfrac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)} \exp\left((\alpha - \theta)\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = +\infty$, c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{\theta \to 0^+} \varphi(\theta) = +\infty}$

Malheureusement, pour la limite lorsque θ tend vers π^-, les choses s'annoncent plus compliquées. Ce qui change concrètement, c'est que $(\alpha - \theta)\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ qui tend cette fois vers $-\infty$ (à cause de $\cos(\theta)$ qui tend vers -1). Donc $\exp\left((\alpha - \theta)\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ va tendre vers 0, ce qui, par produit avec $\dfrac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)}$, nous mène tout droit à une forme indéterminée « $+\infty \times 0$ » ...

Comment nous en sortir ? Une exponentielle qui veut tendre vers 0 multipliée par un terme qui veut tendre vers l'infini. Si on pouvait se ramener à la croissance comparée : $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$...

Pour tout réel θ appartenant à $\left]\dfrac{\pi}{2} \,;\, \pi\right[$, $\varphi(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta} \times \dfrac{(\alpha - \theta)\cos\theta}{\sin(\theta)} \exp\left((\alpha - \theta)\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

Nous avons fait apparaître, à l'extérieur de exp, le même terme $\dfrac{(\alpha - \theta)\cos\theta}{\sin(\theta)}$ qu'il y a à l'intérieur. Evidemment, pour cela, il a fallu compenser le $\cos\theta$ en trop au numérateur en multipliant par $\dfrac{1}{\cos\theta}$. D'où la précision « θ appartenant à $\left]\dfrac{\pi}{2} \,;\, \pi\right[$ », pour nous restreindre à un intervalle sur lequel cos ne s'annule pas, et qui nous permet tout de même de faire tendre θ vers π par valeurs inférieures (autrement dit, vers π^-)

$\lim\limits_{\theta \to \pi} \sin(\theta) = \sin(\pi) = 0$. De plus : $\forall x \in \left]0 \,;\, \pi\right[$, $\sin(x) > 0$.

Certains diraient plus simplement : « $\lim_{\theta\to\pi^-} \sin(\theta) = 0^+$ ». A titre personnel, cela ne me dérangerait pas de lire ça sur une copie, mais bon nombre d'enseignants détestent voir du 0^+, du 0^-, ou plus généralement du a^+ ou du a^- comme résultat d'un calcul de limite. En soi, la limite, c'est a, pas a^+ ni a^-.

Et : $\lim_{\theta\to\pi} \alpha-\theta = \alpha-\pi$, avec $\alpha-\pi>0$. (car $\alpha \geq 2\pi$)

Donc, par quotient de limites : $\lim_{\theta\to\pi^-} \dfrac{\alpha-\theta}{\sin(\theta)} = +\infty$. Et : $\lim_{\theta\to\pi} \cos(\theta) = \cos(\pi) = -1$

D'où, par produit de limites : $\lim_{\theta\to\pi^-} \dfrac{(\alpha-\theta)\cos\theta}{\sin(\theta)} = -\infty$

Or, une croissance comparée fournit : $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$. Donc, par composition de limites : $\lim_{\theta\to\pi^-} \dfrac{(\alpha-\theta)\cos\theta}{\sin(\theta)} \exp\left((\alpha-\theta)\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = 0$.

En outre : $\lim_{\theta\to\pi^-} \dfrac{1}{\cos\theta} = -1$. Enfin, par produit de limites : $\boxed{\lim_{\theta\to\pi^-} \varphi(\theta) = 0}$

Pour $r>0$ fixé : $\lim_{\theta\to0^+} \varphi(\theta) = +\infty$, $\lim_{\theta\to\pi^-} \varphi(\theta) = 0$ et $r \in \left]0\ ;\ +\infty\right[$

De plus, la fonction φ est continue sur $\left]0\ ;\ \pi\right[$, par quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas), composée et produit de fonctions continues.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet donc de conclure ce qui suit :

$\boxed{\text{pour } r>0 \text{ fixé, l'équation } \varphi(\theta) = r \text{ admet (au moins) une solution dans l'intervalle } \left]0\ ;\ \pi\right[.}$

3) Soit ω appartenant à $\mathbb{C}$. Montrons qu'il existe z appartenant à D tel que $\omega = g(z)$. Autrement dit, pour ω complexe fixé, montrons que l'équation $ze^z = \omega$, d'inconnue z, admet au moins une solution dans D.

Dans les remarques sur l'énoncé, nous avions parlé de y, et ici, nous parlons de ω. Pourquoi ce choix de lettre différent ? Pour nous aider à faire un lien notamment avec 1)...

Si $\omega = 0$, $\omega = 0e^0$ avec $0 \in D$. Donc l'équation $g(z) = 0$ a bien une solution dans D.
D étant, par définition, l'union de l'ensemble $\{Re^{i\theta}\ ;\ R>0 \text{ et } 0<\theta<\pi\}$ et du singleton $\{0\}$, on a bien $0 \in D$.

Si $\omega \neq 0$, posons $\omega = re^{i\alpha}$ avec $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

Cette expression n'était pas utilisable pour ω = 0, ce qui nous a fait traiter ce cas à part.

Montrons l'existence de $z = Re^{i\theta}$ avec $R > 0$ et $0 < \theta < \pi$ tel que $\omega = ze^z$

D'après 1), l'équation $ze^z = \omega$ est équivalente au système :

$$\begin{cases} Re^{R\cos(\theta)} = r \\ R\sin(\theta) \quad = \alpha - \theta \ \ (\text{modulo } 2\pi) \end{cases}$$

Ne perdons pas de vue qui sont nos inconnues dans l'histoire, à savoir R et θ. Quant à r et α, qui définissent ω, ils sont fixés.
J'aimerais diviser par $\sin(\theta)$*, mais ce « modulo 2π » me dérange un peu... Suis-je vraiment obligé de me le trimballer ? La seconde équation du système veut dire :*
$\exists k \in \mathbb{Z},\ R\sin(\theta) = \alpha - \theta + 2k\pi$*. En divisant par* $\sin(\theta)$*, elle devient :* $\exists k \in \mathbb{Z},\ R = \dfrac{\alpha-\theta}{\sin\theta} + \dfrac{2k\pi}{\sin\theta}$
Le « modulo 2π » devient donc un « modulo $\dfrac{2\pi}{\sin\theta}$ *» ... Bof.*

En particulier, pour prouver que l'équation $ze^z = \omega$ admet une solution z dans D, il suffit de prouver l'existence de $R > 0$ et $\theta \in \left]0\ ;\ \pi\right[$ tels que

$$\begin{cases} Re^{R\cos(\theta)} = r \\ R\sin(\theta) \quad = \alpha - \theta \end{cases}$$

Euh, où est passé le « modulo 2π » ? Si on prouve l'existence d'un couple (R,θ) *solution du dernier système (avec R et θ dans les bons ensembles), alors en particulier, ce couple est solution du système précédent (avec le modulo). C'est pour cela que j'ai écrit « il suffit ». C'est un mini-risque que je prends (il se pourrait que le dernier système n'ait pas de solution, et que le précédent en ait), mais je sens bien l'expression de R en fonction de θ dans la seconde équation...*

La fonction sin ne s'annulant pas sur $\left]0\ ;\ \pi\right[$, ce dernier système est équivalent à

$$\begin{cases} Re^{R\cos(\theta)} = r \\ R \quad = \dfrac{\alpha-\theta}{\sin\theta} \end{cases} \quad \text{ou encore} \begin{cases} \dfrac{\alpha-\theta}{\sin\theta}\exp\left(\dfrac{\alpha-\theta}{\sin\theta}\cos(\theta)\right) = r \\ R \quad = \dfrac{\alpha-\theta}{\sin\theta} \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \begin{cases} \varphi(\theta) = \ r \\ R \quad = \dfrac{\alpha-\theta}{\sin\theta} \end{cases}$$

Dans la première ligne, R a été remplacé par son expression en fonction de θ, ce qui nous a permis de faire apparaître $\varphi(\theta)$

Puisque $r > 0$, nous savons d'après 2) qu'il existe θ appartenant à $]0\ ;\ \pi[$ tel que $\varphi(\theta) = r$.

Pour un tel θ, posons $R = \dfrac{\alpha - \theta}{\sin\theta}$. *Il suffit de montrer que $R > 0$ et le tour est joué !*

Or, $\alpha \in [2\pi\ ;\ 4\pi[$ (et $\theta \in]0\ ;\ \pi[$). Donc $\alpha - \theta > 0$.
Comme $\theta \in]0\ ;\ \pi[$, nous savons aussi : $\sin\theta > 0$. D'où : $R > 0$.

Il existe bien un couple $(R,\theta) \in]0\ ;\ +\infty[\times]0\ ;\ \pi[$ solution du système

$$\begin{cases} Re^{R\cos(\theta)} = r \\ R\sin(\theta) \ = \alpha - \theta \end{cases} \text{ et donc en particulier du système } \begin{cases} Re^{R\cos(\theta)} = r \\ R\sin(\theta) \ = \alpha - \theta \ \ (\text{modulo } 2\pi) \end{cases}$$

Le nombre complexe $z = Re^{i\theta}$, appartenant à D, est solution de l'équation $g(z) = \omega$.

Nous avons bien établi que pour tout ω appartenant à $\mathbb{C}$, l'équation $g(z) = \omega$ admet une solution dans D.

Autrement dit, nous avons bien établi que $\boxed{g \text{ est surjective.}}$

Exercice 17

Sors-nous ton parapluie pour esquiver la grêle
de ces questions qui lient les racines entre elles.

Énoncé : (temps conseillé : 2h 15 min) (****) *d'après X-ENS 2019 MP Maths A*

Pour tout entier $n > 1$, on définit le polynôme P_n par :
$P_n = X^4 - (n+6)X^3 + (n+10)X^2 - (n+6)X + 1$

1) Soient p et q deux entiers relatifs non nuls premiers entre eux. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, si p divise q^k, alors $p \in \{-1; 1\}$

2) Montrer que pour tout $n > 1$, P_n n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$, et que P_n a au moins une racine réelle strictement plus grande que 1. Dans la suite, on notera α_n cette racine.

3) Montrer que si $x \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors $\dfrac{1}{x}$ aussi, et $\overline{x}$ aussi.

On note $\alpha_n, \dfrac{1}{\alpha_n}$, γ_n et $\dfrac{1}{\gamma_n}$ les racines de P_n dans $\mathbb{C}$, et on pose : $t_n = \alpha_n + \dfrac{1}{\alpha_n}$ et $s_n = \gamma_n + \dfrac{1}{\gamma_n}$. On admet que : $P_n = \big(X - \alpha_n\big)\big(X - \dfrac{1}{\alpha_n}\big)\big(X - \gamma_n\big)\big(X - \dfrac{1}{\gamma_n}\big)$

4) Montrer que pour tout $n > 1$, $t_n + s_n = n + 6$ et que $t_n s_n = n + 8$

5) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$

6) Montrer que pour tout $n > 1$, s_n est réel et que $0 < s_n < 2$.

7) En déduire que γ_n n'est pas réel et que γ_n est de module 1.

8) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty$

Remarques sur l'énoncé :

Dans la question 1), « $p \in \{-1; 1\}$ » veut tout simplement dire « $p = -1$ ou $p = 1$ »

On rappelle que $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels. Si besoin, n'hésitez pas à revenir à ce rappel sur les rationnels (remarques sur l'énoncé de l'exercice 6).

Correction de l'exercice 17 :

1) *Deux nombres premiers entre eux et une histoire de divisibilité. S'il s'agissait pour p de diviser un produit, Gauss n'aurait pas été bien loin. Mais justement... Une telle puissance q^k n'est-elle pas une répétition de produits ?*

Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la propriété R_k : « si p divise q^k, alors $p \in \{-1;1\}$ »
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel k, R_k est vraie.
Oui oui, on peut tout à fait choisir comme propriété R_k une implication (dépendant de k, bien entendu)... Quant au choix du nom R_k, c'est pour éviter d'utiliser P_k et une éventuelle confusion avec les polynômes P_n de l'énoncé.
Initialisation : si p divise q^0, p divise 1, donc $p \in \{-1;1\}$. R_0 est bien vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain $k \in \mathbb{N}$, R_k soit vraie, et montrons que R_{k+1} aussi est vraie.
Supposons donc que : si p divise q^k, alors $p \in \{-1;1\}$.
Et montrons que : si p divise q^{k+1}, alors $p \in \{-1;1\}$.
Concentrons-nous sur l'implication à montrer : il nous faut, en supposant que p divise q^{k+1}, réussir à établir que $p \in \{-1;1\}$.
Mais que faire de l'implication R_k, supposée vraie ? Eh bien, si à un moment, nous parvenons à établir que p divise q^k, cette implication R_k nous permettra d'en déduire que $p \in \{-1;1\}$.
Si p divise q^{k+1}, p divise en fait $q^k \times q$. *Ah, mon cher Gauss...*
De plus, p et q sont premiers entre eux. Le théorème de Gauss nous permet donc d'affirmer que p divise q^k. Puis, l'hypothèse de récurrence P_k nous permet d'en déduire que $p \in \{-1;1\}$.
Nous avons bien établi : si p divise q^{k+1}, alors $p \in \{-1;1\}$. P_{k+1} est donc vraie.

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure que pour tout entier naturel k, R_k est vraie.
$\boxed{\text{Autrement dit, pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ si } p \text{ divise } q^k, \text{ alors } p \in \{-1;1\}.}$

2) Soit $n > 1$. Supposons par l'absurde que P_n admet une racine rationnelle r. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, avec p et q premiers entre eux, tels que $r = \dfrac{p}{q}$.

Nous avons choisi d'écrire r sous forme de fraction irréductible. Contrairement à la situation de l'exercice 6, il me semble, au vu de la question précédente, que l'hypothèse « premiers entre eux » s'avérera utile ici.

r étant une racine de P_n, nous avons : $r^4-(n+6)r^3+(n+10)r^2-(n+6)r+1=0$
C'est-à-dire : $\frac{p^4}{q^4}-(n+6)\frac{p^3}{q^3}+(n+10)\frac{p^2}{q^2}-(n+6)\frac{p}{q}+1=0$
En mettant le membre de gauche sous le même dénominateur :

$$\frac{p^4-(n+6)p^3q+(n+10)p^2q^2-(n+10)pq^3+q^4}{q^4}=0$$
Puis : $p^4-(n+6)p^3q+(n+10)p^2q^2-(n+10)pq^3+q^4=0$
Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul. Non, n'osez pas rajouter « ou son dénominateur est nul »...
Voilà qui est sympathique, nous nous retrouvons avec une égalité d'entiers. Des considérations de divisibilité sont donc maintenant possibles...
Dans cette somme de termes, il n'y a que des multiples apparents de q, sauf p^4...

Autrement dit : $p^4+q\Big(-(n+6)p^3+(n+10)p^2q-(n+10)pq^2+q^3\Big)=0$, ou encore :
$p^4=-q\Big(-(n+6)p^3+(n+10)p^2q-(n+10)pq^2+q^3\Big)$,
où $-(n+6)p^3+(n+10)p^2q-(n+10)pq^2+q^3$ est un entier (par produits et somme d'entiers).
p^4 est donc un multiple de q.
Oui, c'est la même chose que de dire : q divise p^4, et oui, je pense à la question 1.

Or, p et q sont premiers entre eux. *Heureusement que nous l'avons supposé...*

Donc, d'après 1), $q\in\{-1;1\}$. De plus, $q\in\mathbb{N}^*$. Donc $q=1$.

De même (en factorisant cette fois-ci par p) :
$p\Big(p^3-(n+6)p^2q+(n+10)pq^2-(n+10)q^3\Big)+q^4=0$.

C'est-à-dire : $q^4=-p\Big(p^3-(n+6)p^2q+(n+10)pq^2-(n+10)q^3\Big)$.
p divise donc q^4, et donc, encore d'après 1) : $p\in\{-1;1\}$.

Donc $r=\frac{-1}{1}=-1$ ou $r=\frac{1}{1}=1$.

Mais -1 et 1 ne sont pas racines de P_n. En effet :
$P_n(-1) = 1+n+6+n+10+n+6+1 = 3n+24 > 0$ et $P_n(1) = 1-n-6+n+10-n-6+1 = -3n < 0$
r ne peut donc pas être racine de P_n, ce qui est absurde.
Notre supposition de départ « P_n admet une racine rationnelle r » était donc fausse.
Nous avons bien montré que $\boxed{\text{pour tout } n > 1,\ P_n \text{ n'a pas de racine dans } \mathbb{Q}.}$

Comment montrer qu'un tel polynôme, avec une tête aussi compliquée, a (au moins) une racine réelle strictement plus grande que 1 ? Peut-être qu'un théorème d'existence...

Soit $n > 1$. La fonction polynomiale P_n est continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[1\ ;\ +\infty[$.
De plus, $P_n(1) = -3n < 0$ et, par quotients, somme et produit de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x^4\left(1 - \frac{n+6}{x} + \frac{n+10}{x^2} - \frac{n+6}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) = +\infty. \quad 0 \in [P_n(1)\ ;\ +\infty[$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P_n(x) = 0$ admet (au moins) une solution dans $[1\ ;\ +\infty[$. De plus, cette solution n'est pas 1 car $P_n(1) \neq 0$. L'équation $P_n(x) = 0$ admet donc (au moins) une solution dans $]1\ ;\ +\infty[$.

Nous avons bien établi ce qui suit :
$\boxed{\text{pour tout } n > 1,\ P_n \text{ a au moins une racine réelle strictement plus grande que 1.}}$

Cette question était particulièrement difficile. En conditions d'examen, en cas de blocage, il ne faut surtout pas hésiter à passer à la suite. Voyez plutôt la différence en termes de difficulté...

3) Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $P_n(x) = 0$. *On me parle de $\frac{1}{x}$, j'ai intérêt à justifier que x est non nul.*

$P_n(0) = 1$ donc 0 n'est pas racine de P_n. Donc $x \neq 0$.

Et $P_n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^4} - \frac{n+6}{x^3} + \frac{n+10}{x^2} - \frac{n+6}{x} + 1 = \frac{1-(n+6)x+(n+10)x^2-(n+6)x^3+x^4}{x^4}$

Vous ne reconnaissez pas quelqu'un au numérateur ?

Donc $P_n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{P_n(x)}{x^4} = 0$ (car par hypothèse, x est une racine de P_n).

En conclusion, $\boxed{\text{si } x \in \mathbb{C} \text{ est racine de } P\text{, alors } \frac{1}{x} \text{ aussi.}}$

Par ailleurs, si $x \in \mathbb{C}$ est racine de P : $x^4-(n+6)x^3+(n+10)x^2-(n+6)x+1=0$

Donc : $\overline{x^4-(n+6)x^3+(n+10)x^2-(n+6)x+1}=\overline{0}$ *On a conjugué de chaque côté*

Propriétés sympathiques de la conjugaison : pour tous nombres complexes z et z', pour tout entier naturel k : $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}, \overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'}$, $\overline{zz'}=\overline{z}\times\overline{z'}$, $\overline{z^k}=\overline{z}^k$

Puis : $\overline{x}^4-\overline{(n+6)}\overline{x}^3+\overline{(n+10)}\overline{x}^2-\overline{(n+6)}\overline{x}+\overline{1}=\overline{0}$
Rappelons aussi que pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $z \in \mathbb{R}$, alors $\overline{z}=z$
Donc : $\overline{x}^4-(n+6)\overline{x}^3+(n+10)\overline{x}^2-(n+6)\overline{x}+1=0$ *Ah, mais qu'avons-nous écrit là ?*
Autrement dit : $P_n(\overline{x})=0$

En conclusion, $\boxed{\text{si } x \in \mathbb{C} \text{ est racine de } P\text{, alors } \overline{x} \text{ aussi.}}$

Le programme de Terminale vous permettait déjà d'affirmer : si z est une racine complexe d'un polynôme P de degré 2 à coefficients réels, alors $\overline{z}$ aussi est racine de P. Ce résultat reste en fait valable quel que soit le degré de P (du moment qu'il est à coefficients réels). La preuve se fait dans le cas général en passant au conjugué, comme nous avons procédé plus haut dans le cas de ce polynôme de degré 4.

4) *Certains d'entre vous ont peut-être vu, au lycée, ce qu'on appelle les relations coefficients-racines, pour des polynômes de degré 2. Mais pour le degré 4, ça m'étonnerait... En attendant de les voir en première année, que faire ici ? Jouer des deux écritures que nous connaissons de P_n.*

Soit $n>1$.
$P_n=(X-\alpha_n)(X-\frac{1}{\alpha_n})(X-\gamma_n)(X-\frac{1}{\gamma_n})=(X^2-(\frac{1}{\alpha_n}+\alpha_n)X-\alpha_nX+1)(X^2-(\frac{1}{\gamma_n}+\gamma_n)X+1)$

Peut-être est-il temps de faire intervenir t_n et s_n ?
Donc $P_n=(X^2-t_nX+1)(X^2-s_nX+1)$
$=X^4-s_nX^3+X^2-t_nX^3+t_ns_nX^2-t_nX+X^2-s_nX+1$
$=X^4-(s_n+t_n)X^3+(t_ns_n+2)X^2-(s_n+t_n)X+1$
Or, nous savons aussi : $P_n=X^4-(n+6)X^3+(n+10)X^2-(n+6)X+1$

L'unicité des coefficients de P_n, et en particulier des coefficients devant X^3 et X^2 (celui devant X étant le même que celui devant X^3) nous permet d'écrire :
$\boxed{t_n + s_n = n+6}$ et $t_n s_n + 2 = n + 10$, c'est-à-dire : $\boxed{t_n s_n = n+8}$ (et ce pour tout $n > 1$)

5) *Pour ce genre d'inégalité qui ne semble pas vouloir tomber « directement », il peut être bon de poser une fonction et de l'étudier. Ainsi, on peut parvenir à nos fins en posant $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$, en étudiant ses variations sur $]0 ; +\infty[$ (signe de la dérivée...) et en constatant qu'elle admet un minimum en $x = 1$ et que ce minimum est $f(1) = 2$.*
Ce serait astucieux s'il n'y avait pas beaucoup plus simple ici...

Pour tout réel $x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} - 2 = \dfrac{x^2 + 1 - 2x}{x} = \dfrac{(x-1)^2}{x}$ avec $(x-1)^2 \geq 0$ et $x > 0$.

Donc $x + \dfrac{1}{x} - 2 \geq 0$. Nous avons bien montré : $\boxed{\forall x > 0,\ x + \dfrac{1}{x} \geq 2}$

6) Pour tout $n > 1, s_n = n + 6 - t_n$. Or, $t_n = \alpha_n + \dfrac{1}{\alpha_n}$ avec α_n réel, donc t_n est réel. Par somme de réels, $\boxed{s_n \text{ est réel.}}$

Nous savons aussi : $\forall n > 1, t_n = 6 + n - s_n$. En remplaçant t_n par son expression en fonction de s_n dans l'égalité $t_n s_n = n + 8$, nous obtenons : $(6 + n - s_n)s_n = n + 8$.
Donc : $-s_n^2 + (6+n)s_n - (n+8) = 0$, ou encore : $s_n^2 - (6+n)s_n + n + 8 = 0$
s_n est donc racine du polynôme $X^2 - (6+n)X + n + 8$
On obtient de la même manière que t_n est racine de ce même polynôme.

Il est possible d'obtenir ce dernier résultat plus immédiatement si l'on connaît les relations coefficients-racines pour des polynômes de degré 2 : sachant que $t_n + s_n = n + 6$ et $t_n s_n = n + 8$, nous pouvions en déduire immédiatement ce que nous venons d'obtenir autrement, à savoir que t_n et s_n sont les racines du polynôme $X^2 - (n+6)X + n + 8$

Que faire pour montrer que $0 < s_n < 2$? Calculer le discriminant de $X^2 - (6+n)X + n + 8$ et exprimer ses racines ? Ça risque de ne pas être joli... Faisons plus simple : montrons que $X^2 - (6+n)X + n + 8$ admet nécessairement une racine dans $]0 ; 2[$, et que ça ne peut pas être t_n...

La fonction $Q_n : x \mapsto x^2 - (6+n)x + n + 8$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[0 ; 2]$. De plus, $Q_n(0) = n + 8 > 0$ et $Q_n(2) = 4 - 2(6+n) + n + 8 = -n < 0$

Donc $0 \in [Q_n(2)\ ;\ Q_n(0)]$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $Q_n(x) = 0$ admet (au moins) une solution dans $[0\ ;\ 2]$. De plus, $Q_n(0) \neq 0$ et $Q_n(2) \neq 0$.
Q_n admet donc une racine (au moins) dans $]0\ ;\ 2[$

Or, $t_n = \alpha_n + \dfrac{1}{\alpha_n}$, avec $\alpha_n > 1$, donc a fortiori $\alpha_n > 0$. D'après 5), $t_n \geq 2$. Donc $t_n \notin]0\ ;\ 2[$
Etant donné que s_n et t_n sont les seules racines de $Q_n = X^2 - (6+n)X + n + 8$, c'est donc nécessairement s_n qui est dans $]0\ ;\ 2[$.

Nous avons bien montré : $\boxed{\forall n > 1,\ 0 < s_n < 2}$

7) Soit $n > 1$. γ_n est un nombre complexe non nul (0 n'est pas racine de P_n).
Comment montrer qu'il n'est pas réel ? Un coup d'œil à l''expression de s_n en fonction de γ_n, et un autre coup d'œil au résultat de la 5)...

Supposons par l'absurde que γ_n soit un réel (non nul).
Dans ce cas, γ_n est nécessairement strictement positif, sinon $s_n = \gamma_n + \dfrac{1}{\gamma_n} < 0$.

Mais, d'après 5), puisque $\gamma_n > 0$, $\gamma_n + \dfrac{1}{\gamma_n} \geq 2$. Autrement dit, $s_n \geq 2$, ce qui contredit le résultat de 6). Absurde.

Nous pouvons donc en conclure que $\boxed{\text{pour tout } n > 1,\ \gamma_n \text{ est un complexe non réel.}}$

D'où tiendrions-nous une information sur son module ? Il y a un lien sympathique entre le module et le conjugué...

Pour tout $n > 1$, γ_n est un nombre complexe racine de P_n. D'après 3), $\overline{\gamma_n}$ aussi est racine de P_n.
Les racines de P_n sont α_n, $\dfrac{1}{\alpha_n}$, γ_n et $\dfrac{1}{\gamma_n}$. Comme γ_n n'est pas réel, $\overline{\gamma_n} \neq \gamma_n$.
Donc nécessairement, $\gamma_n \in \{\alpha_n; \dfrac{1}{\alpha_n}; \dfrac{1}{\gamma_n}\}$. Or, α_n et $\dfrac{1}{\alpha_n}$ sont réels, et $\overline{\gamma_n}$ ne l'est pas (sinon γ_n aussi serait réel).

Il s'ensuit que : $\overline{\gamma_n} = \dfrac{1}{\gamma_n}$. *En quoi ça nous rapproche du module de γ_n ? (Papa papa, on arrive bientôt ? Si l'on se souvient d'une certaine relation, on est à deux pas...)*

Donc $\overline{\gamma_n} \times \gamma_n = 1$. C'est-à-dire : $|\gamma_n|^2 = 1$.

Eh oui... Se souvenir que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = |z|^2$ peut s'avérer utile.

$|\gamma_n|$ étant un réel positif, nous pouvons en conclure : $|\gamma_n| = 1$.
Nous avons bien établi que $\boxed{\text{pour tout } n > 1, \gamma_n \text{ est de module } 1.}$

8) *N'est-il pas temps que cette torture prenne fin ? Oh, ce n'est pas la plus méchante des questions, si l'on se sert bien des informations à notre disposition.... Et elle est tout à fait accessible même en ayant sauté certaines des précédentes (en admettant leurs résultats, bien entendu).*
On veut établir qu'une quantité α_n (réelle) tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Cette quantité α_n intervient dans l'expression de t_n, et ce même t_n intervient dans des relations qui font apparaître du n (notamment $t_n + s_n = n + 6$). C'est probablement notre clé pour obtenir une limite infinie...

Pour tout $n > 1$, $t_n + s_n = n + 6$. Donc $t_n = n + 6 - s_n$. Or, d'après 6), $s_n < 2$. Donc $-s_n > -2$
Puis : $n + 6 - s_n > n + 4$. Nous avons donc : $\forall n > 1,\ t_n > n + 4$.
Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 4 = +\infty$. Donc, par théorème de comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = +\infty$

Oui mais c'est α_n qui nous intéresse, pas t_n...

De plus : $\forall n > 1, \alpha_n + \dfrac{1}{\alpha_n} = t_n$. Donc $\alpha_n = t_n - \dfrac{1}{\alpha_n}$.

Et, par définition de α_n (cf énoncé), $\alpha_n > 1$. D'où, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{\alpha_n} < \dfrac{1}{1} = 1$. Puis $t_n - \dfrac{1}{\alpha_n} > t_n - 1$.

Donc : $\forall n > 1, \alpha_n > t_n - 1$. Et, par somme de limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n - 1 = +\infty$

Enfin, par théorème de comparaison : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty}$

Exercice 18

La fonction sur laquelle nos stylos s'ajustent
est multiplicative et prend le nom d'August.

Énoncé : (temps conseillé : 20 min) (***) *d'après Centrale 2020 MP Maths 1*

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est multiplicative lorsque :

$$\begin{cases} f(1) \neq 0 \\ \forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 : \text{ PGCD } (m;n) = 1 \Longrightarrow f(mn) = f(m) \times f(n) \end{cases}$$

Soit μ la fonction définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que μ est multiplicative.

Remarques sur l'énoncé :

De même que dans l'exercice 16, « $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ » veut juste dire : f est définie sur $\mathbb{N}^*$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}$

Correction de l'exercice 18 :

1) *Il s'agit « simplement » de montrer que la fonction μ vérifie bien les conditions qui font d'une fonction une fonction multiplicative.*
μ est une fonction définie sur $\mathbb{N}^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. $\mu(1) = 1$ donc $\mu(1) \neq 0$

Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que PGCD $(m;n) = 1$
Montrons que $\mu(mn) = \mu(m) \times \mu(n)$
Commençons par un cas simple...
Pour $m = 1$: d'une part, $\mu(1 \times n) = \mu(n)$, et d'autre part $\mu(1) \times \mu(n) = 1 \times \mu(n) = \mu(n)$, donc $\mu(1 \times n) = \mu(1) \times \mu(n)$. On montre de même, pour $n = 1$: $\mu(m \times 1) = \mu(m) \times \mu(1)$

Reste à montrer que $\mu(mn) = \mu(m) \times \mu(n)$ dans le cas où $m \neq 1$ et $n \neq 1$.

La définition de μ parle de produit de nombres premiers. Cela peut nous donner l'idée d'introduire la décomposition en facteurs premiers de m et n.

Il existe un entier naturel non nul K, K nombres premiers p_1, p_2,..., p_K deux à deux distincts, et K entiers naturels non nuls α_1, α_2,...,α_K tels que $m = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_K^{\alpha_K}$
Phrase un peu longue, mais si l'on veut introduire rigoureusement la décomposition en facteurs premiers de m (permise car $m \neq 1$), il faut introduire le nombre de nombre premiers distincts intervenant dans cette décomposition, les nombres premiers en question, et les puissances auxquelles ils sont respectivement élevés dans la décomposition.

De même, il existe un entier naturel non nul L, L nombres premiers q_1, q_2,..., q_L deux à deux distincts, et L entiers naturels non nuls β_1, β_2,...,β_L tels que $n = q_1^{\beta_1} \times q_2^{\beta_2} \times ... \times q_L^{\beta_L}$
Des lettres différentes que celles de la décomposition en facteurs premiers de m : aucune raison que les deux décompositions aient autant de nombres premiers ou que les puissances soient les mêmes.

De plus, m et n étant premiers entre eux, ils ne peuvent avoir de nombre premier en commun dans leurs décompositions en facteurs premiers.
Les nombres premiers $p_1, p_2, ..., p_K$, $q_1, q_2, ..., q_L$ sont donc des nombres premiers deux à deux distincts. Et la décomposition en facteurs premiers de $m \times n$ est donc :
$m \times n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_K^{\alpha_K} \times q_1^{\beta_1} \times q_2^{\beta_2} \times ... \times q_L^{\beta_L}$

Il y a une nuance à bien comprendre dans la définition de μ : lorsqu'on nous dit, dans le cas où $n \neq 1$, que $\mu(n) = (-1)^r$ si n est le produit de r nombres premiers distincts, et 0 sinon, cela indique que $\mu(n) = 0$ dès lors que la décomposition en facteurs premiers de n fait figurer un nombre premier à une puissance strictement supérieure à 1. En effet, par exemple, $2 \times 3^4 \times 7$ n'est pas un produit de nombres premiers distincts (la faute à la puissance 4 en exposant du nombre premier 3).

Si l'un des entiers $\alpha_1,\ldots,\alpha_K$ est strictement supérieur à 1, m n'est pas un produit de nombres premiers distincts (et $m \neq 1$) donc par définition de μ, $\mu(m) = 0$.
Dans ce cas, $m \times n$ non plus n'est pas un produit de nombres premiers distincts (et $mn \neq 1$) donc $\mu(m \times n) = 0$.
L'égalité $\mu(m \times n) = \mu(m) \times \mu(n)$ est donc bien vérifiée dans ce cas.
De même si l'un des entiers $\beta_1,\ldots,\beta_L$ est strictement supérieur à 1 (dans ce cas, $\mu(n) = 0$ et $\mu(mn) = 0$)

Reste le cas où : $\forall i \in [\![1;K]\!], \alpha_i = 1$ et $\forall i \in [\![1;L]\!], \beta_i = 1$
Dans ce cas, $m = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_K$, produit de K nombres premiers distincts. Donc $\mu(m) = (-1)^K$.
Et $n = q_1 \times q_2 \times \ldots \times q_L$, produit de L nombres premiers distincts. Donc $\mu(n) = (-1)^L$.
Quant à $m \times n$, il s'écrit : $m \times n = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_K \times q_1 \times q_2 \times \ldots \times q_L$, ce qui est le produit de $K+L$ nombres premiers distincts. Donc $\mu(mn) = (-1)^{K+L}$.
D'où : $\mu(mn) = (-1)^K \times (-1)^L$, et donc $\mu(mn) = \mu(m) \times \mu(n)$

Nous avons bien établi : $\boxed{\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 : \text{ PGCD } (m;n) = 1 \Longrightarrow f(mn) = f(m) \times f(n)}$

$\boxed{\text{En conclusion, } \mu \text{ est multiplicative.}}$

Quelques rappels de calcul matriciel

Ces rappels **ne sont pas exhaustifs** et se concentreront notamment sur les notions nécessaires pour aborder les exercices 19 et 20. Vous pouvez aussi consulter cette playlist de vidéos courtes, série introductive sur le calcul matriciel qui reprend en grande partie les rappels ci-après.
Enfin, si vous estimez ne pas avoir besoin de ces rappels, vous pouvez attaquer directement les exercices ici.

Tailles et positions

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Une matrice réelle de taille $n \times p$ est un tableau de nombres qui comporte n lignes et p colonnes. Ces nombres sont appelés coefficients de la matrice.
Le coefficient situé à la i-ème ligne et j-ième colonne d'une matrice M sera noté $m_{i,j}$, ou parfois $[M]_{i,j}$.

Exemples : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

M est une matrice de taille 3×3. N est une matrice de taille 3×2.
P est une matrice de taille 2×1. Q est une matrice de taille 1×4.
On note aussi : $M \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $N \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $P \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$
Par ailleurs, on peut aussi dire que P est une matrice colonne de taille 2, et que Q est une matrice ligne de taille 4.
Quelques coefficients : $m_{3,3} = 2$, $n_{1,2} = -1$, $p_{2,1} = \dfrac{1}{2}$ et $q_{1,4} = 1$

Lorsqu'une matrice a autant de lignes que de colonnes, on dit qu'elle est carrée (de taille n si elle a n lignes). Plus simplement que $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels se note aussi $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Dans les exemples ci-dessus, M est une matrice carrée de taille 3. On peut noter : $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Egalité de deux matrices

Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont la même taille et que leurs coefficients (aux mêmes emplacements) sont deux à deux égaux.

Matrice identité

La matrice identité de taille n est la matrice dont les coefficients diagonaux (diagonale qui va d'en haut à gauche jusqu'en bas à droite) sont égaux à 1, les autres étant égaux à 0. On la note souvent I_n.

Par exemple : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ...

Matrice nulle

La matrice nulle $O_{n,p}$ est la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont égaux à 0. Par commodité, $O_{n,n}$ est notée O_n.

Par exemple : $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $O_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ...

Somme de matrices

On peut sommer deux matrices A et B de même taille.
Si A et B sont deux matrices de taille $n \times p$, la matrice $A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ obtenue en sommant deux à deux les coefficients aux mêmes emplacements.

Exemple : si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $P = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$M + N = \begin{pmatrix} 1+1 & 0+2 & 1+0 \\ 0-1 & 1+3 & 0+4 \\ 0+5 & 0+0 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarquez que l'addition matricielle est commutative : lorsque l'addition est possible, on a toujours : $M + N = N + M$
Ici, on ne peut pas sommer M et P, ou N et P (pas les mêmes tailles)
Par ailleurs, pour toute matrice A de taille $n \times p$, $A + O_{n,p} = A$. On dit que $O_{n,p}$ est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Produit d'une matrice par un réel

On peut multiplier n'importe quelle matrice A par un réel k. La matrice kA est la matrice de même taille que A, obtenue en multipliant chaque coefficient de A par k.

Exemple : si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $-5M = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$

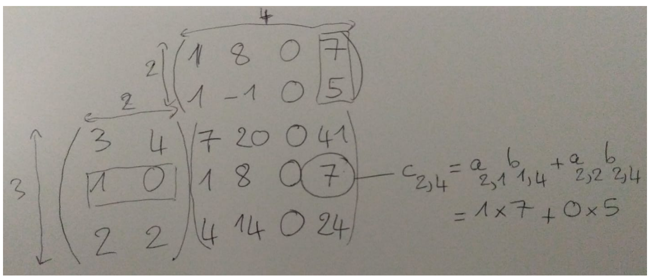
Produit de deux matrices

C'est plus compliqué que la somme... Il ne s'agit pas d'un simple produit terme à terme. Si A est une matrice de taille $n \times p$ et si B est une matrice de taille $p \times q$, on définit la matrice $A \times B$ (notée aussi AB) ainsi : $C = A \times B$ est la matrice de taille $n \times q$ telle que, pour tous entiers i et j vérifiant $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq q$: $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$
Autrement dit : $c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \ldots + a_{i,p}b_{p,j}$
Pour obtenir le coefficient $c_{i,j}$, on prend la i-ème ligne de A et la j-ième colonne de B. On effectue alors, pour tout entier k entre 1 et p, le produit du k-ième terme de cette i-ème ligne de A avec le k-ième terme de cette j-ème ligne de B, et on somme ces p produits.
Un exemple nous permettra d'y voir plus clair :

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (de taille 3×2) et $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (de taille 2×4),

$C = A \times B$ est une matrice de taille 3×4,

$$\text{et } C = \begin{pmatrix} 3\times 1+4\times 1 & 3\times 8+4\times(-1) & 3\times 0+4\times 0 & 3\times 7+4\times 5 \\ 1\times 1+0\times 1 & 1\times 8+0\times(-1) & 1\times 0+0\times 0 & 1\times 7+0\times 5 \\ 2\times 1+2\times 1 & 2\times 8+2\times(-1) & 2\times 0+2\times 0 & 2\times 7+2\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 0 & 41 \\ 1 & 8 & 0 & 7 \\ 4 & 14 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$



Disposition plus simple pour le calcul, et détail du calcul de $c_{2,4}$

Attention : le produit matriciel $A \times B$ n'est possible que lorsque le nombre de colonnes de A est égal aux lignes de B.
Cela implique notamment que le produit matriciel n'est pas commutatif : on n'a pas en général $A \times B = B \times A$ (puisqu'en général, l'un peut être défini sans que l'autre ne le soit).

Dans le cas où A et B sont deux matrices carrées de même taille, les produits $A \times B$ et $B \times A$ sont bien définis, mais pas nécessairement égaux. Lorsque $A \times B = B \times A$, on dit que les matrices A et B commutent.

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 + 4 \times 1 & 3 \times 8 + 4 \times (-1) \\ 1 \times 1 + 0 \times 1 & 1 \times 8 + 0 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 20 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

$B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 8 \times 1 & 1 \times 4 + 8 \times 0 \\ 1 \times 3 + (-1) \times 1 & 1 \times 4 + (-1) \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

On remarque : $A \times B \neq B \times A$

Pour toute matrice carrée A de taille n, on a $A \times I_n = I_n \times A = A$
On dit que I_n est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Par ailleurs, pour toute matrice A de taille $n \times p$, $A \times O_{p,q} = O_{n,q}$ et $O_{m,n}A = O_{m,p}$

Cas particulier du produit d'une matrice carrée par une matrice colonne

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},\ AX = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times (-3) + 4 \times 5 + 1 \times 0 \\ 1 \times (-3) + 0 \times 5 + 2 \times 0 \\ -1 \times (-3) - 2 \times 5 + 6 \times 0 \end{pmatrix}$$

Donc $AX = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$

Quelques propriétés calculatoires

Pour tous réels a et b, pour toutes matrices M et N de même taille :
$(a+b)M = aM + bM \qquad a(bM) = (ab)M = abM \qquad a(M+N) = aM + aN$

Pour toutes matrices A, B et C tels que les produits matriciels soient possibles :

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (qu'on peut donc écrire sans ambiguïté $A \times B \times C$ ou ABC)
  C'est ce qu'on appelle l'associativité du produit matriciel.
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
  C'est ce qu'on appelle la distributivité du produit sur l'addition.

L'intégrité tombe à l'eau

Notez qu'un produit de deux matrices peut être nul sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle. Voyez plutôt :

si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $A \times B = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ 0 \times 0 + 0 \times 0 & 0 \times 0 + 0 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$

Et pourtant, ni A ni B n'est nulle...
La jolie propriété « un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul » que vous avez sur $\mathbb{R}$ (et aussi sur $\mathbb{C}$ si vous avez vu les nombres complexes), qui vous accompagne depuis le collège, et qui fait de $\mathbb{R}$ ce que l'on appelle - frimons un peu - un anneau intègre, tombe à l'eau pour les matrices...

Par contre, il est tout à fait exact d'affirmer que le produit λM entre un réel λ et une matrice M de taille $n \times p$ est nul si et seulement si $\lambda = 0$ ou $M = O_{n,p}$

Puissances d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A une matrice carrée de taille n.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La puissance k-ième de A est $A^k = A \times A \times ... \times A$ (où A apparaît k fois).
Et, par convention : $A^0 = I_n$. (de même que pour tout réel a, $a^0 = 1$)
Nous avons donc : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^{k+1} = A \times A^k = A^k \times A$.
Remarquez en particulier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_n^k = I_n$

Inversibilité et inverse d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit M une matrice carrée de taille n.
M est dite inversible lorsqu'il existe une matrice N carrée de taille n telle que :
$M \times N = N \times M = I_n$.
N est alors appelée l'inverse de M, et on note $N = M^{-1}$

(En fait, l'une des deux égalités $M \times N = I_n$ ou $N \times M = I_n$ suffit et implique l'autre)

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$:

$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 0 - 1 \times (-1) & 3 \times 1 - 1 \times 3 \\ 1 \times 0 + 0 \times (-1) & 1 \times 1 + 0 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

A est donc inversible et $A^{-1} = B$ (de même, B est inversible et $B^{-1} = A$)

Les matrices carrées de taille n ne sont pas toutes inversibles.

Lorsqu'une matrice carrée A est inversible, son inverse A^{-1} est unique.

Lorsqu'une matrice carrée A est inversible d'inverse A^{-1}, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^{-k} est la matrice définie ainsi : $A^{-k} = (A^{-1})^k$

Lorsque A est inversible, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k l'est aussi, et $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k = A^{-k}$

Transposée d'une matrice

Si A est une matrice de taille $n \times p$, la transposée de A, que l'on note A^T (ou ${}^tA$), est la matrice de taille $p \times n$ telle que : $\forall i \in [\![1;p]\!], \forall j \in [\![1;n]\!], \left[A^T\right]_{i,j} = [A]_{j,i} = a_{j,i}$.
Autrement dit, le coefficient situé à la i-ème ligne et j-ième colonne de la matrice A^T est égal au coefficient situé à la j-ème ligne et i-ième colonne de la matrice A.

Exemple : si $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $M^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Et si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Remarquez que dans le cas de la matrice A carrée, A^T s'obtient à partir de A en effectuant, sur ses coefficients, une sorte de symétrie axiale d'axe la diagonale de A.

Une matrice carrée A est dite symétrique lorsqu'elle est égale à sa transposée, autrement dit lorsque $A^T = A$.
Une matrice carrée A est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$

Exercice 19

Produits, transpositions et calculs de puissances
se donnent pour mission d'épicer vos vacances.

Énoncé : (temps conseillé : 45 min) (***) *d'après CCINP 2022 MP Maths 2*

Pour toute matrice M, on notera M^T la matrice transposée de M.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note S_n^+ l'ensemble suivant : $S_n^+ = \{M \in S_n,\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T M X \geq 0\}$

Soient a et b deux réels. On note : $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que : $J \in S_3^+$

2) Montrer que : $A \in S_3^+$ si et seulement si $(a + 2b \geq 0$ et $a \geq b)$

On pourra montrer que pour tous réels x, y et z :

$$a(x^2+y^2+z^2)+2b(xy+yz+xz) = \frac{1}{3}(a+2b)(x+y+z)^2 + \frac{1}{6}(a-b)(2x-y-z)^2 + \frac{1}{2}(a-b)(y-z)^2$$

3) Calculer J^k pour tout entier naturel non nul k. Cette expression est-elle valable pour $k = 0$?

Remarques sur l'énoncé :

Remarquons que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit matriciel MX appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Et comme $X^T \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, le produit matriciel $X^T(MX)$ - c'est-à-dire, par associativité, $X^T M X$ - appartient à $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$. C'est donc une matrice carrée de taille 1, que l'on pourra simplement assimiler à un réel. C'est ce qui donne du sens à « $X^T M X \geq 0$ » dans la définition de S_n^+.

Par définition, une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à S_n^+ si et seulement si elle est symétrique et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le réel $X^T M X$ est positif ou nul.

Correction de l'exercice 19 :

1) J est une matrice carrée de taille 3, et trivialement, $J^T = J$, donc J est symétrique.
Il est très rare que j'écrive « trivialement », mais là... Puisque tous les coefficients de J sont égaux à 1, on a bien $J^T = J$.
Donc : $\boxed{J \in S_3.}$

Montrons maintenant que pour tout X appartenant à $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X^T JX \geq 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $JX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = (x+y+z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a tout simplement mis en facteur le réel $x+y+z$

Donc $X^T JX = X^T \times (x+y+z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (x+y+z) \times X^T \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (x+y+z) \times \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soyez bien attentifs aux différents objets présent dans le dernier produit. Nous avons déplacé le réel $(x+y+z)$ à notre gré dans le produit car sa position ne change rien. (Il ne s'agit pas là de prétendre que le produit matriciel serait commutatif...)
Attention à ne pas confondre le réel $(x+y+z)$ et la matrice ligne $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$

Puis : $X^T JX = (x+y+z) \times (x \times 1 + y \times 1 + z \times 1) = (x+y+z)^2 \geq 0$
C'est un carré de réel. Attention au jour où vous devrez peut-être manipuler des matrices à coefficients complexes...
Nous avons bien montré : $\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ X^T JX \geq 0}$
$\boxed{\text{En conclusion, } J \in S_3^+}$

2) *Commençons par montrer ce que l'énoncé nous propose en indication...*

Soient x, y et z trois réels. $\frac{1}{3}(a+2b)(x+y+z)^2 + \frac{1}{6}(a-b)(2x-y-z)^2 + \frac{1}{2}(a-b)(y-z)^2$
$= \frac{1}{3}(a+2b)(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz) + \frac{1}{6}(a-b)(4x^2+y^2+z^2-4xy-4xz+2yz)$
$+ \frac{1}{2}(a-b)(y^2-2yz+z^2)$

Nous avons utilisé une extension de la première identité remarquable : pour tous réels A,

B et C, $(A+B+C)^2 = A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC$. Si on ne la connait pas, on peut la retrouver petit à petit, avec la première identité remarquable :
$(A+B+C)^2 = \big((A+B)+C\big)^2 = (A+B)^2+2(A+B)C+C^2 = A^2+2AB+B^2+2AC+2BC+C^2$
On peut aussi la retrouver « à la main », par double distributivité.

Rangeons maintenant les x^2 ensemble, les y^2 ensemble, les z^2 ensemble, les xy ensemble...

Donc $\frac{1}{3}(a+2b)(x+y+z)^2 + \frac{1}{6}(a-b)(2x-y-z)^2 + \frac{1}{2}(a-b)(y-z)^2$

$$= x^2\Big(\frac{a+2b}{3} + \frac{2(a-b)}{3}\Big) + y^2\Big(\frac{a+2b}{3} + \frac{a-b}{6} + \frac{a-b}{2}\Big) + z^2\Big(\frac{a+2b}{3} + \frac{a-b}{6} + \frac{a-b}{2}\Big)$$

$$+ xy\Big(\frac{2(a+2b)}{3} - \frac{2(a-b)}{3}\Big) + yz\Big(\frac{2(a+2b)}{3} + \frac{a-b}{3} - (a-b)\Big) + xz\Big(\frac{2(a+2b)}{3} - \frac{2(a-b)}{3}\Big)$$

$$= x^2 \times \frac{a+2b+2a-2b}{3} + y^2 \times \frac{2a+4b+a-b+3a-3b}{6} + z^2 \times \frac{2a+4b+a-b+3a-3b}{6}$$

$$+ xy \times \frac{2a+4b-2a+2b}{3} + yz \times \frac{2a+4b+a-b-3a+3b}{3} + xz \times \frac{2a+4b-2a+2b}{3}$$

$$= ax^2+ay^2+az^2+2bxy+2byz+2bxz = a(x^2+y^2+z^2)+2b(xy+yz+xz) \quad (*)$$

J'aurais pu aller légèrement plus vite dans mes calculs, par exemple en n'éclatant pas en deux le terme y^2+z^2 au départ, mais j'ai préféré le faire par souci de clarté pour un maximum de lecteurs.

Ok. Maintenant, quel rapport avec l'appartenance - ou pas - de la matrice A à S_n^+ ?

Quelles que soient les valeurs des réels a et b, A est symétrique. Donc $A \in S_3$.

De plus, pour tout X appartenant à $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$AX = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+bz \\ bx+ay+bz \\ bx+by+az \end{pmatrix} \text{ donc } X^T AX = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ax+by+bz \\ bx+ay+bz \\ bx+by+az \end{pmatrix}$$

D'où : $X^T AX = x(ax+by+bz)+y(bx+ay+bz)+z(bx+by+az)$
$= ax^2+bxy+bxz+bxy+ay^2+byz+bxz+byz+az^2$
$= a(x^2+y^2+z^2)+2b(xy+yz+xz)$ *Oh mais je te reconnais !*

Nous voulons donc montrer l'équivalence :
$\left[\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \ a(x^2+y^2+z^2)+2b(xy+yz+xz) \geq 0\right] \iff (a+2b \geq 0 \ \text{ et } \ a \geq b)$

Cela revient - (*) nous permet cette reformulation - à montrer l'équivalence :
$\left[\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \ \frac{1}{3}(a+2b)(x+y+z)^2+\frac{1}{6}(a-b)(2x-y-z)^2+\frac{1}{2}(a-b)(y-z)^2 \geq 0\right]$
$\iff (a+2b \geq 0 \ \text{ et } \ a \geq b)$

Procédons par double implication.
« $\Longrightarrow$ » Supposons que pour tous réels x, y et z,

$$\frac{1}{3}(a+2b)(x+y+z)^2+\frac{1}{6}(a-b)(2x-y-z)^2+\frac{1}{2}(a-b)(y-z)^2 \geq 0$$

Comment, à partir de cette information, établir que $a+2b \geq 0$ et que $a \geq b$? L'information dont nous partons est riche : elle est valable pour tous réels x, y et z. Nous pouvons donc remplacer x, y et z par des réels de notre choix, et l'inégalité restera vraie...
Quels choix de x, y et z arrangeraient nos affaires ? Si l'on pouvait juste garder, par exemple, du $a+2b$ dans l'inégalité, ce serait sympathique...

En prenant $x = 1$, $y = 1$, et $z = 1$, nous obtenons :

$\frac{1}{3}(a+2b)(1+1+1)^2+\frac{1}{6}(a-b)(2-1-1)^2+\frac{1}{2}(a-b)(1-1)^2 \geq 0$, c'est-à-dire : $3(a+2b) \geq 0$

Puis (comme $3 > 0$) : $a+2b \geq 0$

Ce choix de x, y et z nous a permis de faire apparaître des 0 en facteur devant les termes en $a-b$, tout en gardant un facteur strictement positif devant $a+2b$. Bien sûr, ce n'était pas le seul choix possible.
Choisissons maintenant x, y et z tels que $x+y+z = 0$ (et tel qu'au moins l'un des deux termes $2x-y-z$ ou $y-z$ soit non nul).

En prenant $x = 0, y = 1$, et $z = -1$, nous obtenons :

$\frac{1}{3}(a+2b)(0+1-1)^2+\frac{1}{6}(a-b)(0-1+1)^2+\frac{1}{2}(a-b)(1+1)^2 \geq 0$, c'est-à-dire : $2(a-b) \geq 0$

D'où : $a-b \geq 0$, c'est-à-dire : $a \geq b$. Nous avons donc établi :

$$\boxed{\left[\forall x,y,z \in \mathbb{R},\ \ a(x^2+y^2+z^2)+2b(xy+yz+xz) \geq 0\right] \implies (a+2b \geq 0 \ \text{ et } \ a \geq b)}$$

« $\Longleftarrow$ » Supposons maintenant que $a+2b \geq 0$ et $a \geq b$ (c'est-à-dire $a \geq b$)
Alors, pour tous réels x, y et z, par produits et somme de réels positifs :
$\dfrac{1}{3}(a+2b)(x+y+z)^2 + \dfrac{1}{6}(a-b)(2x-y-z)^2 + \dfrac{1}{2}(a-b)(y-z)^2 \geq 0$

Oui, cette implication-ci est bien plus immédiate...
Nous avons donc établi :

$$\boxed{(a+2b \geq 0 \ \text{ et } \ a \geq b) \implies \left[\forall x,y,z \in \mathbb{R},\ \ a(x^2+y^2+z^2)+2b(xy+yz+xz) \geq 0\right]}$$

En conclusion : $\boxed{A \in S_3^+ \text{ si et seulement si } (a+2b \geq 0 \ \text{ et } \ a \geq b)}$

3) *Il ne faut bien sûr pas tomber dans l'erreur grossière de considérer que J^k s'obtiendrait en élevant à la puissance k chaque coefficient de J (ce qui donnerait tout simplement $J^k = J$ puisque tous les coefficients de J, élevés à n'importe quelle puissance, redonneraient 1). Il n'y a aucune raison que cela soit vrai, vu que le produit matriciel ne se fait pas simplement coefficient par coefficient.*
Essayons de nous donner une idée de ce que J^k peut valoir (pour $k \in \mathbb{N}^*$) en commençant par calculer les premières puissances de J.

$J^1 = J$ *(Oui, bon, d'accord)*

$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les coefficients de J^2 sont tous égaux à $1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 3$

Donc $J^2 = 3J$. Puis : $J^3 = J^2 \times J = 3J \times J = 3J^2 = 3 \times 3J = 9J$
Et $J^4 = J^3 \times J = 9J \times J = 9J^2 = 9 \times 3J = 27J$

Une règle sympathique semble se dessiner. Des puissances de 3... Nous pouvons émettre la conjecture suivante : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ J^k = 3^{k-1}J$ *(Oui, oui, vérifiez, 3^{k-1} et pas 3^k)*
Mais il faut la démontrer. Une démonstration par récurrence semble particulièrement indiquée.

Il semblerait que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ J^k = 3^{k-1}J$. Montrons-le par récurrence sur k :

Initialisation pour $k = 1$: $J^1 = J$ et $3^{1-1}J = J$, donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Supposons que pour un certain rang $k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = 3^{k-1}J$.

On a alors : $J^{k+1} = J^k \times J = 3^{k-1}J \times J = 3^{k-1} \times J^2$. Donc : $J^{k+1} = 3^k J$ et la propriété est vérifiée au rang $k+1$

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure que $\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } k,\ J^k = 3^{k-1}J}$

Autrement dit, si l'on ne veut pas bouder son plaisir d'en donner l'expression explicite :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ J^k = \begin{pmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{pmatrix}$$

Pour $k = 0$: $J^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Et $3^{0-1}J = \dfrac{1}{3} \times J = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \neq I_3$

$\boxed{\text{L'expression } J^k = 3^{k-1}J \text{ n'est donc pas valable pour } k = 0}$

Exercice 20

Demandons-nous ici pour finir en beauté
avec qui la matrice T peut commuter.

Énoncé : (temps conseillé : 30 min) (**) *d'après CCP 2011 MP Maths 2*

Soit E un sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire, tout simplement, un ensemble d'éléments qui appartiennent tous à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: peut-être $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tout entier, peut-être pas).
On dit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :
(i) E est non vide (c-à-d qu'il existe au moins un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ appartenant à E)
(ii) pour tous réels a et b, pour toutes matrices M et N appartenant à E, la matrice $aM + bN$ appartient aussi à E.

Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$ le commutant de A.

1) Démontrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Soit la matrice $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $C(T)$

Remarques sur l'énoncé :

L'énoncé introduit la notion de sous-espace vectoriel (en la définissant afin qu'elle soit utilisable sans autres prérequis que le programme de Terminale), sans même avoir introduit la définition d'espace vectoriel (plus riche, et pas nécessaire pour la résolution de l'exercice) que vous verrez en première année. Pour faire (très) simple, un espace vectoriel est un ensemble d'éléments muni de deux lois (ou opérations) satisfaisant certaines règles sur cet ensemble. En particulier, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ muni de la loi interne + (addition entre deux matrices) et de la loi externe . (multiplication d'une matrice par un réel) est un espace vectoriel.

Le produit matriciel n'est pas commutatif, mais cela n'interdit pas, dans des cas particuliers, à des matrices (carrées de même taille) de commuter. On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutent lorsque $AB = BA$.

Pour une matrice donnée $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $C(A)$ est donc l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A. D'où le nom de commutant de A.

Correction de l'exercice 20 :

1) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Par définition, $C(A)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Commençons par montrer que $C(A)$ est non vide, c'est-à-dire qu'il existe au moins une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $AM = MA$. Vous n'en connaissez pas ?

Soit O_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. $AO_3 = O_3A = O_3$. Donc $O_3 \in C(A)$.
$C(A)$ est donc non vide.
On aurait aussi pu remarquer : $AI_3 = I_3A = A$, et donc $I_3 \in C(A)$

Soient a et b, et soient M et N appartenant à C. Montrons que $aM + bN$ appartient à C.
$aM + bN$ appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $A(aM + bN) = a \times AM + b \times AN = a \times MA + b \times NA$
La dernière égalité vient du fait que M et N appartiennent à C.
Et, en factorisant par A à droite : $a \times MA + b \times NA = (aM + bN)A$.
Donc $A(aM + bN) = (aM + bN)A$.
Nous avons bien montré : $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall M, N \in C, aM + bN \in C$

En conclusion : $\boxed{\text{pour tout } A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ , } C(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$

2) $C(T)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec T.
Qu'est-ce que ça donne, explicitement ?

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. $\quad M \in C(A) \iff TM = MT$

$$\iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 2b & b+2c \\ 3d & 2e & e+2f \\ 3g & 2h & h+2i \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 3b & = & 2b \\ 3c & = & b+2c \\ 2d+g & = & 3d \\ 2e+h & = & 2e \\ 2f+i & = & e+2f \\ 2g & = & 3g \\ 2i & = & h+2i \end{array} \right.$$

Nous avons traduit l'égalité matricielle par un système d'égalités coefficient par coefficient. Il y a 9 coefficients donc il devrait y avoir 9 égalités, mais nous n'avons pas fait apparaître celles qui sont trivialement vraies, et ne donnent donc aucune information : $3a = 3a$ *(ligne 1 colonne 1) et* $2h = 2h$ *(ligne 3 colonne 2)*

D'où, avec des simplifications immédiates :

$$M \in C(A) \iff \begin{cases} b &= 0 \\ c &= b \\ g &= d \\ h &= 0 \\ i &= e \\ g &= 0 \\ h &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b &= 0 \\ c &= 0 \\ d &= 0 \\ h &= 0 \\ i &= e \\ g &= 0 \end{cases} \quad \textit{Pas de condition sur } a,\ e \textit{ et } f\ldots$$

L'ensemble des matrices de $C(A)$ est donc l'ensemble des matrices s'écrivant $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$, avec a, e et f réels.

Autrement dit (quitte à renommer nos lettres) :

$$\boxed{C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}}$$

Ou encore : $C(A) = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

$C(A)$ *est en fait l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices* $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

L'an prochain, vous aurez le privilège de noter cet ensemble $\mathrm{Vect}\left(M_1, M_2, M_3\right)$.
En attendant, bonnes vacances !