

Critère de comparaison hors programme mais facile à retrouver

Ayoub Hajlaoui

Montrons ce résultat mais ce sans contester qu'il est bien hors programme en BCPST.

Énoncé : (temps conseillé : 15 min)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge et telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$.

On suppose de plus : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$. Montrer la convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n$

Correction :

Nous savons : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$. Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$

Comment me ramener aux outils de comparaison de séries du programme ? Puis-je me ramener à une histoire d'équivalent ? Je ne vois pas trop. À une comparaison $\leq$ au moins à partir d'un certain rang ? Peut-être que si, en me rappelant ce que veut dire explicitement cette limite nulle...

Autrement dit : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq \varepsilon$. La dernière inégalité revient à : $|u_n| \leq \varepsilon v_n \dots$

L'assertion précédente étant valable pour tout ε strictement positif, elle est en particulier valable pour $\varepsilon = 1$. Nous savons donc qu'il existe un entier naturel N tel que : $\forall n \geq N, \left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq 1$

Cela revient à dire : $\forall n \geq N, |u_n| \leq v_n$ (puisque $v_n > 0$)

Or, la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge. Donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge aussi.

Ce n'est pas tout à fait la série qui nous intéressait, mais tout va bien. La convergence absolue implique la convergence...

Nous avons en fait établi la convergence absolue de $\sum_{n \geq 0} u_n$, et donc la convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n$

Cet exercice est aussi corrigé en vidéo [ici sur ma chaîne youtube](#).

