

Continuité croissante et continuité décroissante

Ayoub Hajlaoui

*Suite d'événements gagnant en certitude,
nous faisons de ton clan l'objet de notre étude.*

Énoncé : (temps conseillé : 30 min)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements croissante au sens de l'inclusion, c'est-à-dire telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$.

On définit ainsi la suite d'événements $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} : B_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n = A_n \setminus A_{n-1}$

1) Montrer que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$

2) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$

3) En considérant maintenant une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements décroissante au sens de l'inclusion, montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$

Le temps conseillé correspond à des élèves de filières pour lesquelles ce résultat n'est pas au programme. Pour d'autres qui voient explicitement le théorème de continuité croissante dans le cours, et pour qui un tel exercice est donc une démonstration de cours, ce temps conseillé pourra être raccourci.

Correction :

Si un schéma peut vous aider à visualiser les A_n et les B_n , ne vous en privez pas. Vous en trouverez un - d'une beauté certes relative - dans la correction en vidéo de cet exercice [sur ma chaîne youtube..](#)

1) Que fait-on très souvent pour montrer une égalité d'ensembles ? Une démo par double inclusion.

Nous savons déjà : $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \subset A_n$. Il s'ensuit immédiatement : $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$

On ne devrait pas, a priori, exiger de vous plus de détails pour conclure ce qui précède, mais s'il en fallait : pour tout $x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$, il existe, par définition, $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B_k$. Or, $B_k \subset A_k$. Donc

$x \in A_k$, et enfin : $x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$

Place, avant de traiter l'autre inclusion, à un résultat intermédiaire qui saute aux yeux, et qui nous sera utile.

Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, A_k = \bigcup_{n=0}^k B_n$



D'où vient une telle idée ? Elle se voit aisément à l'aide d'un schéma, où l'on verrait bien que les couronnes des B_n pour n allant de 0 à k permettent de reconstituer la patate A_k . Oui, la flemme d'incorporer un tel schéma à ce document est d'autant plus incompréhensible que ça aurait pu aller aussi vite que l'écriture de ce dernier paragraphe...

Initialisation : pour $k = 0$: $A_0 = B_0 = \bigcup_{n=0}^0 B_n$

Hérédité : supposons que pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $A_k = \bigcup_{n=0}^k B_n$, et montrons : $A_{k+1} = \bigcup_{n=0}^{k+1} B_n$

Comme $A_k \subset A_{k+1}$, nous savons : $A_{k+1} = (A_{k+1} \setminus A_k) \cup A_k = B_{k+1} \cup A_k$ par définition de B_{k+1}

Puis, par hypothèse de récurrence, $A_{k+1} = B_{k+1} \cup \bigcup_{n=0}^k B_n$, et enfin : $A_{k+1} = \bigcup_{n=0}^{k+1} B_n$

Conclusion Nous avons bien établi : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A_k = \bigcup_{n=0}^k B_n$

Soit maintenant $x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. Par définition : $\exists k \in \mathbb{N}$, $x \in A_k$.

Et, vu ce qui a été démontré précédemment : $x \in \bigcup_{n=0}^k B_n$. Il existe donc un entier naturel n (appartenant plus précisément à $\llbracket 0 ; k \rrbracket$, mais ça ne nous sert pas pour conclure ici) tel que : $x \in B_n$.

Par suite : $x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$. Nous avons donc montré : $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$

Dans la correction en vidéo, la preuve de cette seconde inclusion est faite sans passer par une récurrence, en introduisant le plus petit indice n tel que x appartienne à A_n ...

Enfin : $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$

2) D'après ce qui précède, $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$.

Ce serait bien que les B_n soient deux à deux incompatibles. Encore une fois, ça saute aux yeux sur le schéma que je n'ai pas eu l'égard de vous faire... Mais prouvons-le formellement.

Soient $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i \neq j$. Sans perte de généralité, nous pouvons considérer $i < j$ (quitte à les renommer, l'un étant forcément strictement inférieur à l'autre). Remarquons que $j \in \mathbb{N}^*$.

Soit maintenant $\omega \in B_j$. Par définition, $\omega \in A_j$ et $\omega \notin A_{j-1}$. Or, $A_{j-1} = \bigcup_{n=0}^{j-1} B_n$, avec $i \in \llbracket 0 ; j-1 \rrbracket$.

Donc $\omega \notin B_i$.

Les B_n sont bien deux à deux incompatibles. Par σ -additivité (cas dénombrable), nous savons que la

série $\sum_{n \geq 0} P(B_n)$ converge et que : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n)$

Autrement dit : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^k P(B_n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^k B_n\right)$ par σ -additivité (finie cette fois).

Et comme nous avons établi $\bigcup_{n=0}^k B_n = A_k$, nous pouvons enfin conclure : $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(A_k) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$



Dit autrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$

Nous venons de démontrer le théorème de continuité croissante.

3) Plutôt que de « tout refaire », ramenons-nous astucieusement au résultat précédent.

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant décroissante au sens de l'inclusion, $(\overline{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion.

En effet : $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$, donc $\overline{A_n} \subset \overline{A_{n+1}}$

On note ici $\overline{B}$ l'événement contraire de l'événement B , et plus généralement le complémentaire de la partie B de l'ensemble Ω . Rappelons que pour A et B deux parties de Ω , si $A \subset B$, alors $\overline{B} \subset \overline{A}$

D'après 2) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\overline{A_n}) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$.

Or : $\forall n \in \mathbb{N}, P(A_n) = 1 - P(\overline{A_n})$

Donc, par somme de limites : $(P(A_n))$ converge vers $1 - P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$

De plus : $1 - P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = P\left(\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}}\right) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{\overline{A_n}}\right) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$

Nous avons donc bien établi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$

Nous venons de démontrer le théorème de continuité décroissante.

