Nature de la série des $\dfrac{\ln(n)}{n}$

Ayoub Hajlaoui

Une série dont la nature
peut se deviner sans rature.

Énoncé : (temps conseillé : 5 min)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n}$

Correction :

Nous savons que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *diverge. Comment nous ramener, éventuellement, à une comparaison avec cette série, en utilisant les outils de comparaison du programme ?*

Intuitivement, en $+\infty$, $\frac{\ln n}{n}$ *devient beaucoup plus grand que* $\frac{1}{n}$. *Eh oui attention, la question n'est pas la comparaison de* $\ln n$ *à* n. *D'accord,* $\ln n$ *se fait écraser par* n *en* $+\infty$, *mais ce n'est pas le sujet.*

$\frac{\ln n}{n}$, *c'est* $\frac{1}{n}$ *que l'on a multiplié par ce* $\ln n$ *qui tend lentement mais sûrement vers* $+\infty$... *Inutile, toutefois, d'attendre aussi longtemps. Nous sommes pressés.*

Par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, nous savons : $\forall\, n \geq 3,\ \ln n \geq \ln 3 \geq \ln e = 1$

Donc : $\forall\, n \geq 3,\ \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ *On a juste divisé l'inégalité par n, strictement positif.*

Le fait que cette inégalité ne soit valable qu'à partir du rang 3 *ne me dérange absolument pas pour la comparaison qui va suivre.*

Or, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n} \text{ diverge aussi.}}$

Cet exercice est aussi corrigé en vidéo ici sur ma chaîne youtube.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com